OVER EENIGE GEVALLEN

BIJ DE

THEORIE

VAN

ONSTADIGE (DISCONTINUË) FUNCTIËN,

WAAR MEN TE ONDERSCHEIDEN HEEFT, OF HET ONEINDIGE VAN EEN' EVEN' OF ONEVEN', EEN GEHEELE OF GEBROKEN VORM ZIJ.

DOOR

D. BIERENS DE HAAN.

Uitgegeven door de Koninklijke Akademie van Wetenschappen.

AMSTERDAM,
C. G. VAN DER POST.
1858.

OVER EENIGE GEVALLEN

BIJ DE

THEORIE

VAN

ONSTADIGE (DISCONTINUË) FUNCTIËN,

WAAR MEN TE ONDERSCHEIDEN HEEFT, OF HET ONEINDIGE VAN EEN' EVEN' OF ONEVEN', EEN' GEHEELEN OF GEBROKEN VORM ZIJ.

DOOR

D. BIERENS DE HAAN.



1. Onder de moeijelijkheden in de theorie der bepaalde integralen behoort voorzeker de overgang van het eindige tot het oneindige, en talrijk zijn dan ook de dwalingen, die ontstaan zijn uit het niet behoorlijk letten op de voorzigtigheidsmaatregelen, die hierbij zijn in acht te nemen. Deze overgang kan van tweederlei aard zijn: óf het kan gebeuren, dat eene der beide grenzen van de bepaalde integraal het oneindige tot limiet heeft, óf dit kan het geval zijn met eene standvastige, voorkomende in de functie, die te integreren is. Van elk dezer beide gevallen is het mijn voornemen thans eenige bijzondere voorbeelden te behandelen, en wel zulke, die eensdeels van veel gewigt zijn in de theorie zelve, en ten anderen tot zeer verschillende verklaring en behandeling hebben aanleiding gegeven; deze kunnen niet allen den toets van eene meer bijzondere, strenge overweging doorstaan, en hebben daarom ook tot niet altijd zuivere uitkomsten geleid. Het geldt hier namelijk, hoe vreemd zulks ook in het eerst klinken moge, het onderscheid, dat er somtijds gemaakt moet worden tusschen even en oneven, tusschen geheel en gebroken oneindig

groot; een onderscheid dat meermalen verkeerdelijk over het hoofd werd gezien.

Wanneer men toch eene bepaalde integraal-formule gevonden heeft voor zekere waarden van eene standvastige grootheid h, namelijk $2k$, $2k+1$, ak, pk, (waar a een geheel getal en p een gebroken moet voorstellen) kan het dikwerf voorkomen, dat de gang der redenering juist steunt op dezen bijzonderen overeenkomstigen vorm der standvastige, bijv. het even of oneven zijn, het geheel of gebroken zijn daarvan: is dit het geval, en laat men h tot oneindig aangroeijen, dan gelden de uitkomsten, die alsdan ontstaan, niet algemeen voor $h=\infty$, maar respectivelijk slechts voor $h=2k, =2k+1, =ak, =pk$, met de voorwaarde $k=\infty$.

Uit dit oogpunt nu zullen hier vooreerst te behandelen zijn de integralen van den vorm:

$$\int_a^b Sin.kx.f(x)\,dx \quad \text{of} \quad \int_a^b Cos.kx.f(x)\,dx. \quad (\text{Lim.}\,k=\infty)$$

Het eerst, ongeveer een vierde eeuw geleden, zijn zulke integralen beschouwd door LEJEUNE-DIRICHLET en wel in CRELLE's *Journal für reine und angewandte Mathematik*, Bd. 4, S. 157: sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données.

Hij onderscheidde echter teregt, waar het hier juist op aankwam, namelijk het geval, dat h den vorm $2k+1$ bezat en dus oneven was, ook voor $k=\infty$. Zijne opvolgers echter zagen dit bij soortgelijke bespiegelingen dikwerf over het hoofd en geraakten daardoor somtijds tot valsche uitkomsten. Dit onderzoek zal, naar ik meen, tot eenige belangrijke gevolgtrekkingen aanleiding geven.

Vervolgens zullen de Integralen van den vorm

$$\int_0^\infty \varphi\,(Sin.\alpha x, Cos.\beta x).f(x)\,dx$$

worden nagegaan. Deze integralen zijn van oudere herkomst, en zijn zoowel de aanleiding tot, als het gevolg van zeer verschillende en uiteenloopende, ja zelfs tegenstrijdige, beschouwingen geweest: in lateren tijd heeft vooral RAABE zich veel daarmede bezig gehouden; mijns inziens zijn evenwel somtijds deze uitkomsten, behalve om andere redenen, ook nog daarom niet geldig, omdat de integraal alsdan eigenlijk slechts bestaat onder dezen of dergelijken vorm

$$\int_0^{2\pi k} \varphi\,(Sin.\,\alpha x,\, Cos.\,\beta x).f(x)\,dx. \quad (\text{Lim.}\, k = \infty)$$

zoodat hier de bovenste grens ∞ van den bijzonderen vorm $2\pi k$ bijv. zijn moet. De aldus verkregen uitkomsten zullen op die wijze somtijds van de gewone, als waar aangenomene, moeten verschillen.

Ik geloof, dat deze beide punten van genoeg belang zijn, dat de opzettelijke behandeling daarvan niet ongeschikt of onnut wezen zal.

I. Over de Integralen $\int_a^b Sin.\,kx.f(x)\,dx,\ \int_a^b Cos.\,kx.f(x)\,dx.\,(\text{Lim.}\, k = \infty)$ *

2. Men kan bij deze beschouwing van verschillende integralen uitgaan, wanneer men voor $f(x)$ bijv. schrijft $\frac{1}{x}f(x), \frac{1}{Sin.\,x}f(x)$ enz. Het meest geschikt schijnt daaronder evenwel de afleiding te zijn uit de bepaalde Integralen

$$\int_0^a \frac{Sin.\,kx}{x} f(x)\,dx, \ \text{Lim.}\, k = \infty;$$

niet alleen, omdat men bij de FOURIER'sche Integralen regtstreeks tot deze formulen wordt gebragt, maar ook en vooral omdat zich langs dien weg op de meest leerrijke manier telkens de verschillende gevallen opdoen, die bij enkele bijzondere omstandigheden moeten onderscheiden worden.

Ten einde deze integraal na te gaan, kan men gevoegelijk, naar den aard der functie $Sin.\,kx$, drie bijzondere gevallen onderscheiden ten opzigte van a, dat is $a = \frac{1}{2}\pi$, $0 < a < \frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\pi < a < \infty$; en heeft men dus ten eerste:

---

* Men kan de vroegere beschouwingen, — die echter niet alle met de hier ontwikkelde overeenstemmen, — vooral vinden in de volgende verhandelingen:

LEJEUNE-DIRICHLET, *Journal von Crelle*, Bd. 4. S. 157. — Dezelfde, *Repertorium der Physik. von Dove und Moser*, Bd. 1. S. 152. — Dezelfde, *Journal von Crelle*, Bd. 17. S. 57. — Dezelfde, *Abhandl. Akad. Berlin* 1835.

SCHLÖMILCH, *Grunert's Archiv*, Bd. 1. S. 417. — Dezelfde, *Beiträge zur Theorie bestimmter Integrale*, Jena, Frommann, 1843. VIII. 103 S. 4°. Abth. I. — Dezelfde, *Analytische Studien*, 2te Abth. Leipzig, Engelmann, 1848. 198 S. 8°.

MEIJER, *Journal von Crelle*, Bd. 43. S. 60.

BONNET, *Journal de Liouville*, T. 14. p. 240.

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{Sin.\,k\,x}{x} f(x)\,d\,x. \quad (\text{Lim.}\,k = \infty)$$

Stel hierin $k\,x = y$ met de grenzen 0 en $\frac{1}{2}\,k\,\pi$ voor y, zoo wordt

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}k\pi} \frac{Sin.\,y}{y} f\left(\frac{y}{k}\right) d\,y. \quad (\text{Lim.}\,k = \infty)$$

Dezen grensafstand 0 tot $\frac{1}{2}\,k\,\pi$ kan men nu in k deelen verdeelen, die elk $\frac{1}{2}\,\pi$ bevatten, namelijk 0 tot $\frac{1}{2}\,\pi$, $\frac{1}{2}\,\pi$ tot π, π tot $\frac{3}{2}\,\pi$, ... $\frac{k-1}{2}\,\pi$ tot $\frac{1}{2}\,k\,\pi$; en dan de integraal zelve door eene som van k andere vervangen, die de genoemde deelen tot grensafstanden hebben, zoodat men verkrijgt:

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{Sin.\,y}{y} f\left(\frac{y}{k}\right) dy + \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \frac{Sin.\,y}{y} f\left(\frac{y}{k}\right) d\,y + \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{Sin.\,y}{y} f\left(\frac{y}{k}\right) d\,y + \ldots + \int_{(c-\frac{1}{2})\pi}^{c\pi} \frac{Sin.\,y}{y} f\left(\frac{y}{k}\right) dy +$$

$$+ \int_{c\pi}^{(c+\frac{1}{2})\pi} \frac{Sin.\,y}{y} f\left(\frac{y}{k}\right) d\,y \ldots + \int_{\frac{k-1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}k\pi} \frac{Sin.\,y}{y} f\left(\frac{y}{k}\right) d\,y. \quad (\text{Lim.}\,k = \infty) \ldots\ldots\ldots (a)$$

Deze k integralen zijn ten opzigte der grenzen van tweederlei vorm, naarmate de integratie van de grens $(c-\frac{1}{2})\pi$ tot $c\pi$ of van $c\pi$ tot $(c+\frac{1}{2})\,\pi$ moet plaats hebben. Men kan nu al deze integralen tot andere terug brengen, die 0 en $\frac{1}{2}\,\pi$ tot grenzen hebben; daartoe stelle men in het algemeen, als de grenzen van y zijn

$$\left.\begin{array}{ll} (c-\frac{1}{2})\pi \text{ en } c\pi: & y = c\pi - x, dy = -d\,x, \text{ met } \frac{1}{2}\pi \text{ en } 0 \text{ als grenzen van } x \\ c\pi \text{ en } (c+\frac{1}{2})\pi: & y = c\pi + x, dy = \quad d x, \text{ met } 0 \text{ en } \frac{1}{2}\pi \text{ als grenzen van } x \end{array}\right\} \ldots (b)$$

en dan verkrijgt men voor de beide bedoelde integralen, daar

$$Sin.(c\,\pi \pm x) = Sin.\,c\,\pi.\,Cos.\,x \pm Cos.\,c\,x.\,Sin.\,x = \pm\,Cos.\,c\,\pi.\,Sin.\,x \ldots\ldots (c)$$

is,

$$\int_{(c-\frac{1}{2})\pi}^{c\pi} \frac{Sin.\,y}{y} f\left(\frac{y}{k}\right) dy = -\int_{\frac{1}{2}\pi}^{0} \frac{Sin.(c\,\pi - x)}{c\,\pi - x} f\left(\frac{c\pi - x}{k}\right) dx = -\,Cos.\,c\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{Sin.\,x}{c\pi - x} f\left(\frac{c\pi - x}{k}\right) d\,x,$$

$$\int_{c\pi}^{(c+\frac{1}{2})\pi} \frac{Sin.\,y}{y} f\left(\frac{y}{k}\right) dy = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{Sin\,(c\pi + x)}{c\,\pi + x} f\left(\frac{c\pi + x}{k}\right) dx = Cos.\,c\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{Sin.\,x}{c\pi + x} f\left(\frac{c\pi + x}{k}\right) d\,x.$$

Door de toepassing dezer herleidingsformulen worden nu alle integralen, die in het tweede lid der vergelijking (a) voorkomen, tot andere terug gebragt,

die 0 en $\frac{1}{2}\pi$ tot grenzen hebben; men kan dus al deze integralen onder één integraalteeken vereenigen, dat is:

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left[\frac{Sin.x}{x} f\left(\frac{x}{k}\right) + \frac{Sin.x}{\pi - x} f\left(\frac{\pi - x}{k}\right) - \frac{Sin.x}{\pi + x} f\left(\frac{\pi + x}{k}\right) - \frac{Sin.x}{2\pi - x} f\left(\frac{2\pi - x}{k}\right) + \dots \right.$$

$$\left. + (-1)^k \frac{Sin.x}{k\pi + x} f\left(\frac{k\pi + x}{k}\right)\right] dx. \quad (\text{Lim.}\, k = \infty)$$

Nu kan men tot den limiet van $k = \infty$ overgaan; vooreerst is alsdan de reeks onder het integraalteeken eene oneindige; voorts wordt voor elke $f\left(\frac{c\pi \pm x}{k}\right)$

$$\text{Lim.} f\left(\frac{c\pi \pm x}{k}\right) = f\left(\frac{c\pi \pm x}{\infty}\right) = f(0) \dots\dots\dots\dots (d)$$

wanneer althans de functie $f(x)$ tusschen de grenzen der integratie 0 en $\frac{1}{2}\pi$ stadig is *.

Men kan dus deze $f(0)$ even als $Sin.x$, als gemeenschappelijke factoren onder het integraalteeken afzonderen, waardoor

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(0)\, Sin.x\, dx \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{\pi - x} - \frac{1}{\pi + x} - \frac{1}{2\pi - x} + \frac{1}{2\pi + x} + \frac{1}{3\pi - x} - \dots\right]$$

wordt; maar in het algemeen is $\frac{1}{c\pi - x} - \frac{1}{c\pi + x} = \frac{2x}{c^2\pi^2 - x^2}$, dus wederom den standvastigen factor $f(0)$ buiten het integraalteeken brengende,

$$I_1 = f(0) \int_0^{\frac{1}{2}\pi} Sin.x\, dx \left[\frac{1}{x} + \frac{2x}{\pi^2 - x^2} - \frac{2x}{4\pi^2 - x^2} + \frac{2x}{9\pi^2 - x^2} - \dots\right]$$

Nu weet men dat voor $x < \pi$, (en dit is hier het geval, daar $\frac{1}{2}\pi$ de bovenste grens van x is) de reeks onder het integraalteeken convergeert en *Cosec.* x tot waarde heeft; daardoor wordt eindelijk

$$I_1 = f(0) \int_0^{\frac{1}{2}\pi} Sin.x\, dx.\, Cosec.x = f(0) \int_0^{\frac{1}{2}\pi} dx = \tfrac{1}{2}\pi f(0),$$

dat is:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{Sin.kx}{x} f(x)\, dx = \tfrac{1}{2}\pi f(0). \quad (\text{Lim.}\, k = \infty) \dots\dots\dots\dots (I)$$

---

* Het woord *stadig* wordt hier gebruikt ter vervanging van het fransche *continuë*, even als *onstadig* voor *discontinuë* staat.

Vervolgens zij

$$I_2 = \int_0^a \frac{Sin.\,k\,x}{x} f(x)\,dx \;,\; 0 < a < \tfrac{1}{2}\pi, \quad (Lim.\,k = \infty)$$

zoo heeft men wederom, even als boven $k\,x = y$ stellende,

$$I_2 = \int_0^a \frac{Sin.\,k\,x}{x} f(x)\,dx = \int_0^{ak} \frac{Sin.\,y}{y} f\left(\frac{y}{k}\right) dy. \;(Lim.\,k = \infty)$$

Stel nu dat het grootste veelvoud van $\frac{1}{2}\pi$, dat in $a\,k$ begrepen is, $m.\frac{1}{2}\pi$ zij, en f (die dus kleiner dan $\frac{1}{2}\pi$ is) de rest, zoodat $a\,k = m.\frac{1}{2}\pi + f$ is, — dan zal hierbij m, hoezeer kleiner dan k, (daar a kleiner dan $\frac{1}{2}\pi$ is ondersteld) toch met k moeten aangroeijen en daarmede ∞ tot limiet hebben. Verdeelt men nu den grensafstand o tot $a\,k$ in twee andere 0 tot $\frac{1}{2}\,m\,\pi$ en $\frac{1}{2}\,m\,\pi$ tot $\frac{1}{2}\,m\,\pi + f$, zoo wordt

$$I_2 = \int_0^{\frac{1}{2}m\pi} \frac{Sin.\,y}{y} f\left(\frac{y}{k}\right) dy + \int_{\frac{1}{2}m\pi}^{\frac{1}{2}m\pi+f} \frac{Sin.\,y}{y} f\left(\frac{y}{k}\right) dy. \;(Lim.\,k = \infty \;,\; Lim.\,m = \infty)$$

De eerste integraal in het tweede lid dezer vergelijking heeft, even als bij de formule (I) $\frac{1}{2}\pi f(0)$ tot waarde: de tweede integraal kan men tot eenen meer geschikten vorm terug brengen door de onderstelling $y = \frac{1}{2}\,m\,\pi + x$; alsdan wordt $d\,y = d\,x$ en de grenzen voor de nieuwe veranderlijke x worden 0 en f; daardoor wordt dus die integraal

$$\int_{\frac{1}{2}m\pi}^{\frac{1}{2}m\pi+f} \frac{Sin.\,y}{y} f\left(\frac{y}{k}\right) dy = \int_0^{f} \frac{Sin.\,(\frac{1}{2}\,m\,\pi + x)}{\frac{1}{2}\,m\,\pi + x} f\left(\frac{\frac{1}{2}\,m\,\pi + x}{k}\right) dx;$$

en derhalve

$$I_2 = \tfrac{1}{2}\pi f(0) + \int_0^{f} \frac{Sin.\,(\frac{1}{2}\,m\,\pi + x)}{\frac{1}{2}\,m\,\pi + x} f\left(\frac{\frac{1}{2}\,m\,\pi + x}{k}\right) dx. \;(Lim\;k = \infty \;,\; Lim.\,m = \infty)$$

Maar in de laatste integraal is $Sin.\,(\frac{1}{2}\,m.\pi + x)$ ook voor $m = \infty$ steeds kleiner dan de eenheid; $f\left(\frac{\frac{1}{2}\,m\,\pi + x}{k}\right)$ wordt $f\left(\frac{\frac{1}{2}\,m\,\pi}{k}\right) = f(a)$; de noemer $\frac{1}{2}\,m\,\pi + x$ wordt oneindig, en daarmede vervalt de geheele functie onder het integraalteeken, zoodat die integraal zelve nul wordt. Men heeft dus ook hier

$$I_2 = \tfrac{1}{2}\pi f(0),$$

dat is

$$\int_0^a \frac{Sin.kx}{x} f(x)\,dx = \tfrac{1}{2}\pi f(0)\ ,\ 0 < a < \tfrac{1}{2}\pi.\ (\text{Lim.}\,k = \infty) \ldots\ldots (II)$$

Eindelijk zij

$$I_3 = \int_0^a \frac{Sin.kx}{x} f(x)\,dx\ ,\ \tfrac{1}{2}\pi < a < \infty\ ,\ (\text{Lim.}\,k = \infty)$$

zoo wordt

$$I_3 = \int_0^{ak} \frac{Sin.y}{y} f\left(\frac{y}{k}\right) dy,$$

als men hier wederom $y = kx$ stelt. Deze vorm is volkomen dezelfde als die voor I_2 verkregen: slechts is hier a grooter dan $\frac{1}{2}\pi$, en wordt dus bij herhaling der vorige redenering m grooter dan k; maar dit is dan ook het eenige verschil en de slotsom blijft dezelfde, dat is

$$\int_0^a \frac{Sin.kx}{x} f(x)\,dx = \tfrac{1}{2}\pi f(0)\ ,\ \tfrac{1}{2}\pi < a < \infty.\ (\text{Lim.}\,k = \infty) \ldots\ldots (III)$$

Wanneer men nu, hetgeen in de vergelijkingen (I), (II) en (III) gevonden is, te zamentrekt, komt men tot de algemeene uitkomst:

$$\int_0^a \frac{Sin.kx}{x} f(x)\,dx = \tfrac{1}{2}\pi f(0)\ ,\ 0 < a < \infty.\ (\text{Lim.}\,k = \infty) \ldots\ldots (IV)$$

Op dezelfde wijze is evenzeer

$$\int_0^b \frac{Sin.kx}{x} f(x)\,dx = \tfrac{1}{2}\pi f(0)\ ,\ 0 < b < \infty\ ,\ (\text{Lim.}\,k = \infty)$$

en derhalve, wanneer men de laatste integraal van de integraal (IV) aftrekt,

$$\int_b^a \frac{Sin.kx}{x} f(x)\,dx = 0\ ,\ 0 < b < a < \infty.\ (\text{Lim.}\,k = \infty) \ldots\ldots (V)$$

Hierbij wordt telkens ondersteld dat de functie $f(x)$ stadig zij tusschen de grenzen der integratie.

Bij deze integralen ziet men dat de standvastige k, die het oneindige tot limiet heeft, geheel willekeurig in vorm is, zoodat hier de vroeger gemaakte aanmerking niet te pas komt.

3. Voor de bepaalde integraal

$$\int_0^{a} \frac{Cos.\,k\,x}{x} f(x)\,d\,x \quad (\text{Lim.}\,k = \infty)$$

moet men evenzeer als bij de vorige de drie gevallen onderscheiden, dat $a = \frac{1}{2}\pi$, $0 < a < \frac{1}{2}\pi$ en $\frac{1}{2}\pi < a < \infty$ is.

Is $a = \frac{1}{2}\pi$, dan stelle men weder $k\,x = y$, met 0 en $\frac{1}{2}\,k\,\pi$ als grenzen voor y, en dan wordt:

$$I_4 = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{Cos.\,k\,x}{x} f(x)\,d\,x = \int_0^{\frac{1}{2}k\pi} \frac{Cos.\,y}{y} f\left(\frac{y}{k}\right) d\,y. \quad (\text{Lim.}\,k = \infty)$$

Dezen grensafstand 0 tot $\frac{1}{2}\,k\,\pi$ verdeele men in k deelen, zoodat men eene dergelijke vergelijking (a) verkrijgt als in N°. 2, waarin slechts $Cos.\,y$ voor $Sin.\,y$ komt te staan: men gebruike dezelfde substitutien (b), $y = c\,\pi \pm x$, dan verkrijgt men hier, — daar

$$Cos.(c\,\pi \pm x) = Cos.\,c\,\pi.\,Cos.\,c\,x \mp Sin.\,c\,\pi.\,Sin.\,x = Cos.\,c\,\pi.\,Cos.\,x$$

is, — wanneer men nog alle integralen, die nu dezelfde grenzen 0 en $\frac{1}{2}\pi$ hebben verkregen, onder hetzelfde integraalteeken vereenigt:

$$I_4 = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left[\frac{Cos.\,x}{x} f\left(\frac{x}{k}\right) - \frac{Cos.\,x}{\pi - x} f\left(\frac{\pi - x}{k}\right) - \frac{Cos.\,x}{\pi + x} f\left(\frac{\pi + x}{k}\right) + \frac{Cos.\,x}{2\,\pi - x} f\left(\frac{2\,\pi - x}{k}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{Cos.\,x}{2\,\pi + x} f\left(\frac{2\,\pi + x}{k}\right) - \ldots + (-1)^k \frac{Cos.\,x}{k\,\pi + x} f\left(\frac{k\,\pi + x}{k}\right)\right] d\,x. \quad (\text{Lim.}\,k = \infty)$$

Stel hierin $x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\,y$, waardoor de grenzen van y worden π en 0, terwijl $dy = -\,dx$ is, zoo wordt:

$$I_4 = \int_\pi^0 -dy \left[\frac{Sin.\frac{1}{2}y}{\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}y} f\left(\frac{\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}y}{k}\right) - \frac{Sin.\frac{1}{2}y}{\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}y} f\left(\frac{\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}y}{k}\right) - \frac{Sin.\frac{1}{2}y}{1\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}y} f\left(\frac{1\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}y}{k}\right) + \frac{Sin.\frac{1}{2}y}{1\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}y} f\left(\frac{1\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}y}{k}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{Sin\,\frac{1}{2}y}{2\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}y} f\left(\frac{2\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}y}{k}\right) - \ldots + (-1)^k \frac{Sin.\frac{1}{2}y}{(k+\frac{1}{2})\pi - \frac{1}{2}y} f\left(\frac{(k+\frac{1}{2})\pi - \frac{1}{2}y}{k}\right)\right]. \quad (\text{Lim.}\,k = \infty)$$

Hierin tot de limiet ∞ van k overgaande, wordt dadelijk de reeks eene oneindige en tevens

$$f\left(\frac{\frac{1}{2}c\pi \pm \frac{1}{2}y}{k}\right) = f\left(\frac{\frac{1}{2}c\pi \pm \frac{1}{2}y}{\infty}\right) = f(0) \ldots \ldots \ldots \ldots (f)$$

Derhalve wordt $f(0)$ wederom een standvastige factor, die nu buiten het integraalteeken kan vallen; evenzoo wordt $Sin.\frac{1}{2}y$ een factor, die echter onder het integraalteeken moet blijven; daardoor wordt

$$I_4 = f(0)\int_0^\pi Sin.\tfrac{1}{2}y\,dy\left[\frac{2}{\pi-y}-\frac{2}{\pi+y}-\frac{2}{3\pi-y}+\frac{2}{3\pi+y}+\frac{2}{5\pi-y}-\ldots\right]$$

$$= f(0)\int_0^\pi Sin.\tfrac{1}{2}y\,dy\left[\frac{4y}{\pi^2-y^2}-\frac{4y}{9\pi^2-y^2}+\frac{4y}{25\pi^2-y^2}-\ldots\right],\ (\text{Lim.}\,k=\infty),$$

wanneer men in de reeks onder het integraalteeken elke twee opvolgende termen optelt, die $c\pi \pm y$ tot noemers hebben. Nu heeft, tusschen de hier geldende grenzen, de laatst verkregen reeks onder het integraalteeken $\frac{\pi}{y}\,Sec.\frac{1}{2}y$ tot waarde; van daar is

$$I_4 = f(0)\int_0^\pi Sin.\tfrac{1}{2}y\,dy\frac{\pi}{y}Sec.\tfrac{1}{2}y = \pi f(0)\int_0^\pi \frac{Tang.\frac{1}{2}y\,dy}{y},\ (\text{Lim.}\,k=\infty),$$

of $x = \frac{1}{2}y$ stellende, waardoor de grenzen van x worden 0 en $\frac{1}{2}\pi$,

$$I_4 = \pi f(0)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{Tang.x\,dx}{x}\quad,\ (\text{Lim.}\,k=\infty).$$

Maar het is gemakkelijk in te zien, dat deze integraal eene oneindige waarde heeft; want wanneer men ze, volgens de oorspronkelijke bepaling eener bepaalde integraal, als eene oneindige som van oneindig kleine producten beschouwt, zoo wordt voor de bovenste grens $\frac{1}{2}\pi$ de geïntegreerde functie $\frac{Tang.x}{x}$ hier $\frac{Tang.(\frac{1}{2}\pi-\delta)}{\frac{1}{2}\pi-\delta}$ en heeft dus oneindig tot limiet: het product $\delta.\frac{Tang.(\frac{1}{2}\pi-\delta)}{\frac{1}{2}\pi-\delta}$ wordt $\frac{1}{\frac{1}{2}\pi-\delta}\,\frac{\delta}{Cot.(\frac{1}{2}\pi-\delta)} = \frac{1}{\frac{1}{2}\pi-\delta}\,\frac{1}{-Cosec.^2(\frac{1}{2}\pi-\delta)} = $ $= \frac{-Sin.^2(\frac{1}{2}\pi-\delta)}{\frac{1}{2}\pi-\delta} = \frac{-1}{\frac{1}{2}\pi} = -\frac{2}{\pi}$, niet meer oneindig klein; zoodat de bedoelde integraal oneindig groot wordt. Daardoor heeft men

$$I_4 = \infty\,.\,\pi f(0)\quad,\ (\text{Lim.}\,k=\infty).$$

Deze waarde is in het algemeen oneindig, zoo lang $f(x)$ stadig blijft tus-

schen de grenzen van het integreren. Wordt $f(0)$ nul, dan wordt de waarde van I_4 onbepaald, en kan op deze wijze niet nader worden gevonden. Verder is het duidelijk, in verband met hetgeen in N°. 2 werd aangemerkt, dat ook voor andere waarden van de bovenste grens der integratie a, namelijk voor $0 < a < \frac{1}{2}\pi$ en $\frac{1}{2}\pi < a < \infty$, de integraal dezelfde waarde behoudt; men mag dus tot de algemeene formule besluiten

$$\int_0^a \frac{Cos.\,kx}{x} f(x)\,dx = \infty.\,\pi f(0);\quad (\text{Lim.}\,k = \infty)\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(\text{VI})$$

en hierin is de waarde onbepaald of oneindig, naarmate $f(0)$ nul is of niet. Ook hier wordt de functie stadig ondersteld tusschen de grenzen der integratie.

4. Men kan nu overgaan om voor $f(x)$ bijzondere waarden in de plaats te stellen, die nu aan de gegevene voorwaarde moeten voldoen. Het eerst doet zich de onderstelling voor $f(x) = x\,\text{F}(x)$: dan geven de algemeene vergelijkingen (IV) en (VI) bij stadigheid der functie $\text{F}(x)$:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^a Sin.\,kx.\,\text{F}(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\Big[x\,\text{F}(x)\Big]_{x=0} = \frac{\pi}{2}0.f(0) = 0 \\ &\int_0^a Cos.\,kx.\,\text{F}(x)\,dx = \infty.\,\pi\Big[x\,\text{F}(x)\Big]_{x=0} = \infty.\pi.0.f(0) \end{aligned}\right\}\ (\text{Lim.}\,k = \infty)\,.\,.\,.\,(g)$$

Deze laatste nu is onbepaald; ten einde daaromtrent, zoowel als ten opzigte der eerste, eenige meerdere bijzonderheden te leeren kennen, beschouwe men ze op zich zelve, bijv. de laatste, en stelle deze daartoe onder den vorm

$$I_5 = \int_b^a Cos.\,kx.\,\text{F}(x)\,dx\ .\ (\text{Lim.}\,k = \infty)$$

Hierin zij nu $kx = y$, waardoor bk en ak de grenzen van y worden; men zoeke het laagste veelvoud van π, stel $p\pi$, grooter dan bk, en evenzoo het hoogste veelvoud van π, stel $q\pi$, kleiner dan ak; en noeme de beide resten r en s, (die dus beide kleiner dan π moeten zijn), dat is:

$$bk = p\pi - r\quad,\quad r < \pi;\quad ak = q\pi + s\quad,\quad s < \pi.$$

Alsdan verdeele men den grensafstand bk tot ak in drie deelen, namelijk van $p\pi - r$ tot $p\pi$, van $p\pi$ tot $q\pi$, van $q\pi$ tot $q\pi + s$, waardoor alzoo

$$I_5 = \int_b^a Cos.kx.\text{F}(x)dx = \int_{p\pi-r}^{p\pi} \frac{1}{k}Cos.x.\text{F}\left(\frac{x}{k}\right)dx + \int_{p\pi}^{q\pi} \frac{1}{k}Cos.x.\text{F}\left(\frac{x}{k}\right)dx + \int_{q\pi}^{q\pi+s} \frac{1}{k}Cos.x.\text{F}\left(\frac{x}{k}\right)dx, (\text{Lim.}k = \infty).(i)$$

Stel in de eerste der integralen, die in het laatste lid dezer vergelijking voorkomen, $x = p\pi - y$, zoodat $Cos.\,x = Cos.\,p\pi.\,Cos.\,y + Sin.\,p\pi.\,Sin.\,y = Cos.\,p\pi.\,Cos.\,y$, $dx = -dy$ is, terwijl r en 0 de grenzen van y worden. Evenzoo moet men in de laatste dier integralen $x = q\pi + y$ stellen, zoodat $dx = dy$ en $Cos.\,x = Cos.\,q\pi.\,Cos.\,y$ wordt, met de grenzen 0 en s voor y. Op de onderstelling $p\pi = bk + r$, $q\pi = ak - s$ lettende, heeft men alzoo

$$I_5 = \int_r^0 \frac{1}{k} Cos.p\pi.\,Cos.y.\,F\left(\frac{p\pi - y}{k}\right)(-dy) + \int_{p\pi}^{q\pi} \frac{1}{k} Cos.x.F\left(\frac{x}{k}\right)dx + \int_0^s \frac{1}{k} Cos.q\pi.\,Cos.\,y.\,F\left(\frac{q\pi + y}{k}\right)dy$$

$$= Cos.p\pi.\int_0^r \frac{1}{k} Cos\,y.F\left(\frac{bk + r - y}{k}\right)dy + \int_{p\pi}^{q\pi} \frac{1}{k} Cos.x.F\left(\frac{x}{k}\right)dx + Cos.q\pi.\int_0^s \frac{1}{k} Cos.y.F\left(\frac{ak - s + y}{k}\right)dy, \text{ (Lim.}k = \infty).(k)$$

Is nu $f(x)$ tusschen de grenzen a en b stadig, zoo blijkt reeds uit de vorige vergelijking (i), zoowel als uit de laatste, dat iedere integraal in het tweede lid op zich zelve nul wordt, uithoofde van den factor $\frac{1}{k}$; zoodat dan ook:

$$I_5 = \int_b^a Cos.kx.\,F(x)\,dx = 0 \quad . \quad (\text{Lim.}k = \infty) \quad \ldots\ldots\ldots (VII)$$

Maar de vergelijking (k) leert ons meer. Want indien slechts Lim. $\delta F(b + \delta)$ nul is (voor Lim. $\delta = 0$), waarbij toch $F(b + \delta)$ zelve oneindig kan zijn en er dus stadigheid bij de grens b kan plaats hebben, zoo is voor $\delta = \frac{r - y}{k}$:

$$\text{Lim.}\delta F(b + \delta) = \text{Lim.}\frac{r - y}{k} F\left(b + \frac{r - y}{k}\right) = \text{Lim.}\frac{r - y}{k} F\left(\frac{bk + r - y}{k}\right) = 0,$$

dus
$$\text{Lim.}\frac{1}{k} F\left(\frac{bk + r - y}{k}\right) = 0, (\text{Lim } k = \infty),$$

daar r — als grens der overeenkomstige eerste integraal in het tweede lid van (k) — grooter dan y en toch kleiner dan π zijnde, (zie verg. (h)) $r - y$ een positief eindig getal is; die integraal wordt dus ook in dit geval nul. Indien ook evenzeer Lim. $\delta f(\alpha - \delta) = 0$ is (voor Lim. $\delta = 0$), waarbij ook $F(\alpha - \delta)$ wederom op zich zelve oneindig kan zijn, wanneer de onstadigheid voor de bovenste grens a plaats grijpt, zoo is voor $\delta = \frac{s - y}{k}$:

$$\text{Lim.}\delta F(\alpha - \delta) = \text{Lim.}\frac{s - y}{k} F\left(a - \frac{s - y}{k}\right) = \text{Lim.}\frac{s - y}{k} F\left(\frac{ak - s + y}{k}\right) = 0,$$

dus

$$\text{Lim.}\ \frac{1}{k}\text{F}\left(\frac{ak-s+y}{k}\right)=0 \quad , \quad (\text{Lim.}\ k=\infty)$$

daar bij de laatste integraal in de formule (k) s als grens der y grooter dan elke y is en toch kleiner dan π moet blijven (zie verg. (h)), zoodat $s-y$ een eindig positief getal is. — De integraal zelve is dus ook nul en in plaats van (VII) wordt hier meer algemeen volgens (k):

$$\left.\begin{array}{l} \text{I}_5=\displaystyle\int_b^a Cos.\,k\,x.\,\text{F}\,(x)\,dx=\int_{p\pi}^{q\pi}\frac{1}{k}Cos.\,x.\,\text{F}\left(\frac{x}{k}\right)dx, \\ \text{als Lim.}\,\delta\,\text{F}\,(b+\delta)=0\,,\ \text{Lim.}\,\delta\,\text{F}\,(a-\delta)=0 \quad \text{en} \quad \text{Lim.}\,\delta=0\ \text{is.} \end{array}\right\} (\text{Lim.}\,k=\infty)\,.\,(l)$$

Nu verdeele men zoo als vroeger den grensafstand van $p\,\pi$ tot $q\,\pi$ in $p-q$ andere, die telkens π groot zijn, dan wordt bij de onderstellingen, waaronder (l) bestaat, en die wij gemakshalve niet telkens zullen overschrijven:

$$\text{I}_5=\int_{p\pi}^{(p+1)\pi}\frac{1}{k}Cos.x.\text{F}\left(\frac{x}{k}\right)dx+\int_{(p+1)\pi}^{(p+2)\pi}\frac{1}{k}Cos.x.\text{F}\left(\frac{x}{k}\right)dx+\ldots+\int_{c\pi}^{(c+1)\pi}\frac{1}{k}Cos.x.\text{F}\left(\frac{x}{k}\right)dx+\ldots$$
$$\int_{(q-1)\pi}^{q\pi}\frac{1}{k}Cos.x.\text{F}\left(\frac{x}{k}\right)dx\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(m)$$

Stel nu in eene integraal, die $c\pi$ en $(c+1)\pi$ tot grenzen heeft, $x=c\pi+y$, dan wordt $Cos.\,x=Cos.\,c\,\pi.\,Cos.\,y,\ dx=dy$, en de grenzen van y worden 0 en π; zoodat die algemeene integraal wordt:

$$\int_{c\pi}^{(c+1)\pi}\frac{1}{k}\,Cos.\,x.\,\text{F}\left(\frac{x}{k}\right)dx=Cos.\,c\,\pi.\int_0^{\pi}\frac{1}{k}\,Cos.\,y.\,\text{F}\left(\frac{c\pi+y}{k}\right)dy.$$

Bij alle integralen, die in het tweede lid der vergelijking (m) voorkomen, deze substitutie aanwendende, verkrijgt men voor alle integralen dezelfde grenzen 0 en π, zoodat men ze allen onder een integraalteeken vereenigen kan; daarenboven is $\frac{1}{k}Cos.\,y$ een factor, die aan alle integralen gemeen is. Derhalve

$$\text{I}_5=\int_0^{\pi}\frac{1}{k}Cos.y\,dy\left[\text{F}\left(\frac{p\pi+y}{k}\right)-\text{F}\left(\frac{(p+1)\pi+y}{k}\right)+\ldots+Cos.\{(q-1)\pi\}.\text{F}\left(\frac{(q-1)\pi+y}{k}\right)\right]\,.\,(n)$$

Is nu F (x) tusschen de grenzen 0 en π eene afdalende functie, zoo is de

reeks onder het integraalteeken convergent en begrepen tusschen nul en den eersten term dier reeks, dat is, voor $p\pi$ hare waarde $bk+r$ in de plaats stellende,

$$0 < I_5 < \int_0^\pi \frac{1}{k} Cos.\, y\, dy\, F\left(\frac{bk+r+y}{k}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (o)$$

Maar wegens Lim. $\delta F(b+\delta) = 0$ is ook Lim. $\frac{r+x}{k} F\left(b+\frac{r+x}{k}\right) = 0$, en dus ook, daar $x < r < \pi$ is, Lim. $\frac{1}{k} F\left(b+\frac{r+x}{k}\right) = 0$; derhalve $0 < I_5 < 0$, dat is $I_5 = 0$.

Was F (x) daarentegen tusschen de grenzen 0 en π eene opklimmende functie, zoo is de reeks onder het integraalteeken nog convergent, mits men haar in omgekeerde orde neme; hare waarde is alsdan begrepen tusschen nul en den laatsten term dier reeks, zoo als zij in de vergelijking (n) geordend is; dus voor $q\pi$ hare waarde $ak-s$ stellende, wordt

$$0 < I_5 < \int_0^\pi \frac{1}{k} Cos.\, y\, dy\, F\left(\frac{ak-s-\pi+y}{k}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (p)$$

Nu is Lim. $\delta f(a-\delta) = 0$ ondersteld, dus ook Lim. $\frac{\pi+s-y}{k} F\left(a-\frac{\pi+s-y}{k}\right) = 0$; maar $y < s < \pi$, dus $0 < \pi+s-y < 2\pi$ en daarom Lim. $\frac{1}{k} F\left(a-\frac{\pi+s-y}{k}\right) = 0$, derhalve ook in dit geval $0 < I_5 < 0$, dat is $I_5 = 0$.

Was F (x) verder eene functie, die dan eens opklimmend dan eens afdalend werd, zoude men de integratie van elk maximum tot elk volgend minimum afzonderlijk moeten uitvoeren, en zoude van elke zulke integraal dus het boven gezegde gelden. Werd F (x) voor eenige dier grensafstanden negatief, zoo behoefde men slechts eene nieuwe functie $F_1(x) = -F(x)$ in te voeren, om weder de vorige redenering te doen gelden. Men heeft dus altijd

$$\left.\begin{array}{l}\int_b^a Cos.\, kx.\, F(x)\, dx = 0\ , \\ \text{als Lim.}\, \delta F(b+\delta) = 0,\ \text{Lim.}\, \delta F(a-\delta) = 0 \text{ en Lim.}\, \delta = 0 \text{ is.}\end{array}\right\}(\text{Lim.}\, k = \infty) \quad \ldots\ldots (\text{VIII})$$

wanneer de functie F (x) tusschen de grenzen (uitgesloten) stadig is.

Maar ook wanneer zij voor eenige waarde van x bijv. h (zoodanig dat $b < h < a$ is) onstadig werd, is het gemakkelijk te bepalen, welken invloed dit zal uitoefenen. Men moet alsdan volgens de voorschriften van de theorie

der bepaalde integralen de, naar CAUCHY aldus genoemde, *singuliere* integraal

$$\Delta = \text{Lim.} \int_{h-\varepsilon}^{h+\varepsilon} Cos.\,k\,x.\,F(x)\,dx \ , \quad (\text{Lim.}\,\varepsilon = 0) \ ,$$

van de vroegere waarde aftrekken.

Stel ook hier $k\,x = y$, zoo wordt die correctie

$$\Delta = \text{Lim.} \int_{kh-k\varepsilon}^{kh+k} \frac{1}{k}\,Cos.y.\,F\left(\frac{y}{k}\right) dy \ , \quad (\text{Lim.}\,\varepsilon = 0 \ , \ \text{Lim.}\,k = \infty).$$

Is $k\,\varepsilon = \infty\,.\,0$, zoo wordt van zelf $\Delta = 0$; is dit produkt echter niet nul, zoo heeft men hier eene dergelijke formule als in vergelijking (VIII), en Δ zal dus nul zijn, mits Lim. $\delta\,F\,(h \pm \delta)$ zelve nul is. Daardoor wordt de vergelijking (VIII) eindelijk

$$\int_b^a Cos.\,k\,x.\,F(x)\,dx = 0\,. \quad (\text{Lim.}\,k = \infty) \qquad \text{(IX)}$$

Wordt F (x) voor b, a, of h $(a > h > b)$ onstadig, zoo moet nog respective Lim. $\delta F\,(b + \delta) = 0$, Lim. $\delta\,F\,(a - \delta) = 0$, Lim. $\delta F\,(h \pm \delta) = 0$ zijn voor Lim. $\delta = 0$; hierbij kan b ook nul wezen.

5. Men heeft dus bepaald, wat er van de onbepaalde uitkomst was, die in de laatste der vergelijkingen (g) gevonden werd. Op dezelfde wijze redenerende ten opzigte van de eerste der integralen (g) zal men die uitkomst nog eenigzins kunnen uitbreiden. En dit zal niet moeijelijk zijn, wanneer men nagaat welke verandering in de formule van het vorige N°. plaats grijpt, wanneer men *Sin.* kx voor *Cos.* kx schrijft en evenzeer *Sin.* y voor *Cos.* y. In vergelijking (k) zal de eerste integraal negatief worden, maar daardoor zal (VII) niet veranderen, evenmin als (l) tot (p); de vergelijkingen (VIII) en (IX) blijven dus bestaan (altijd bij het veranderen van *Cos.* in *Sin.*); dat is

$$\int_b^a Sin.\,k\,x.\,F(x)\,dx = 0\,, \quad (\text{Lim.}\,k = \infty) \qquad \text{(X)}$$

Wordt F (x) voor b, a of h $(a > h > b)$ onstadig, zoo moet nog respective Lim. $\delta\,F\,(b + \delta) = 0$, Lim. $\delta\,F\,(a - \delta) = 0$, Lim. $\delta F\,(h \pm \delta) = 0$ zijn, voor Lim. $\delta = 0$. Hierin kan ook $b = 0$ zijn.

In deze vergelijkingen (I) tot (X) is de vorm van k nog geheel onbepaald.

6. Men kan in de algemeene vergelijkingen (IV) en (VI) voor $f(x)$ ook nog andere onderstellingen invoeren, zoodat de noemer x vervangen worde bijv. door $Sin.\,x$ of $Cos.\,x$; en dit zal tot vier verschillende formulen leiden. Zij vooreerst in (IV) $f x = \frac{x}{Sin.\,x} F(x)$, dan wordt zij

$$\int_0^a \frac{Sin.\,k x}{Sin.\,x} F(x)\,d x = \tfrac{1}{2}\pi \left[\frac{x}{Sin.\,x} F(x)\right]_{x=0} . \quad (\text{Lim.}\,k = \infty)$$

Voor $x = 0$ wordt wel is waar $\frac{x}{Sin.\,x} = \frac{0}{0}$ en schijnt dus onbepaald, doch uit de leer der limieten weet men dat Lim. $\frac{x}{Sin.\,x} = 1$ voor Lim. $x = 0$. Maar de bovenstaande vergelijking geldt slechts, wanneer $f(x)$, dat is $\frac{x}{Sin.\,x} F(x)$, stadig is tusschen de grenzen 0 en a; wanneer dit zelfde nu ook met $F(x)$ het geval moet zijn, zoo dient noodzakelijk $\frac{x}{Sin.\,x}$ mede stadig te wezen; deze breuk wordt onstadig voor $x = \pi$; derhalve geldt de bovenstaande vergelijking vooreerst slechts voor a kleiner dan π, dat is:

$$I_6 = \int_0^a \frac{Sin.\,k x}{Sin.\,x} F(x)\,d x = \frac{\pi}{2} F(0). \quad a < \pi. \quad (\text{Lim.}\,k = \infty) \;.\;.\;.\;.\;. \;(\text{XI})$$

Er is dus eene nieuwe onderzoeking noodig, wanneer a gelijk of grooter dan π is; daartoe onderscheide men hier drie gevallen $a = \pi$, $a = b\pi$, $a = b\pi + c$, (waar $c < \pi$ zij), zoodat wij ons eerstens hebben bezig te houden met de integraal

$$I_7 = \int_0^\pi \frac{Sin.\,k x}{Sin.\,x} F(x)\,d x \quad . \quad (\text{Lim.}\,k = \infty)$$

Men ontbinde den grensafstand 0 tot π in twee andere 0 tot $\frac{1}{2}\pi$ en $\frac{1}{2}\pi$ tot π; dat is

$$I_7 = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{Sin.\,k x}{Sin.\,x} F(x)\,d x + \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \frac{Sin.\,k x}{Sin.\,x} F(x)\,d x \;. \;(\text{Lim.}\,k = \infty)$$

Verder stelle men in de laatste integraal $x = \pi - y$, dus $d x = - d y$, $Sin.\,x = Sin.\,y$, $Sin.\,k x = - Cos.\,k\pi.\,Sin.\,k y = Cos.\,\{(k-1)\pi\}.Sin.\,k y$, terwijl de grenzen van y worden $\frac{1}{2}\pi$ en 0; alsdan wordt:

$$I_7 = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{Sin.k\,x}{Sin.\,x} F(x)\,dx + Cos.\,\{(k-1)\pi\}.\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{Sin.\,k\,x}{Sin.\,x} F(\pi-x)\,dx \quad . \ (\text{Lim.}\,k=\infty)$$

Ten opzigte van beide deze integralen kan men nu de formule (XI) aanwenden, waardoor

$$I_7 = \int_0^{\pi} \frac{Sin.\,k\,x}{Sin.\,x} F(x)\,dx = \frac{\pi}{2} F(0) + Cos.\,\{(k-1)\pi\}.\frac{\pi}{2} F(\pi-0)\ ,\ (\text{Lim.}\,k=\infty)\ .\ (\text{XII})$$

wordt. Men ziet hieruit, dat de uitkomst in zoo verre van k afhangt, dat de factor $\{Cos.\,(k-1)\pi\}$ voor k even of oneven gelijk wordt aan de negatieve en positieve eenheid. Zoodra men dus weet, dat k de limiet is van eene evene of onevene grootheid, heeft men

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{\pi} \frac{Sin.\,2\,k\,x}{Sin.\,x} F(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\{F(0)-F(\pi)\} \quad , \\ &\int_0^{\pi} \frac{Sin.\,\{(2\,k-1)\,x\}}{Sin.\,x} F(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\{F(0)+F(\pi)\}. \end{aligned}\right\}\ ,\ (\text{Lim.}\,k=\infty)\ \ldots\ (\text{XIII})$$

Is daarentegen de oorsprong van k niet bekend, zoodat men niet geregtigd is, om k even of oneven aan te nemen, zoo heeft men, naarmate F (π) altijd nul is of niet, uit de vergelijking (XII)

$$\left.\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{Sin.\,k\,x}{Sin.\,x} F(x)\,dx &= \frac{\pi}{2} F(0)\ , \quad \text{als } F(\pi)=0 \text{ is;} \\ &= \text{onbepaald, als } F(\pi) \text{ niet} = 0 \text{ is.} \end{aligned}\right\}\ ,\ (\text{Lim.}\,k=\infty).\ (\text{XIV})$$

Vervolgens beschouwe men het geval dat $a = b\pi$ is, dat is de integraal

$$I_8 = \int_0^{b\pi} \frac{Sin.\,k\,x}{Sin.\,x} F(x)\,dx\,; \quad (\text{Lim.}\,k=\infty)$$

hier verdeele men den grensafstand 0 tot $b\pi$ in b deelen, die elke eenen afstand π bevatten, dan is

$$I_8 = \int_0^{\pi} \frac{Sin.\,k\,x}{Sin.\,x} F(x)\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{Sin.\,k\,x}{Sin.\,x} F(x)\,dx + \ldots + \int_{c\pi}^{(c+1)\pi} \frac{Sin.\,k\,x}{Sin.\,x} F(x)\,dx + \ldots +$$

$$+ \int_{(b-1)\pi}^{b\pi} \frac{Sin.\,k\,x}{Sin.\,x} F(x)\,dx\ ,\ (\text{Lim.}\,k=\infty)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (q)$$

Stel in eenige dier integralen, wier grenzen in het algemeen $c\pi$ en $(c+1)\pi$ mogen zijn, $x = c\pi + y$, $dx = dy$, met de grenzen 0 en π voor y, dan is

$$Sin.x = Cos.c\pi.\,Sin.y\,,$$

$$Sin.kx = Sin.(kc\pi + ky) = Cos.kc\pi.Sin.ky = Cos.\{(k-1)c\pi\}.Cos.c\pi.\,Sin.ky\,,$$

Substitueert men telkens deze uitkomsten in de vergelijking (q), zoo heeft men eerst in het algemeen:

$$\int_{c\pi}^{(c-1)\pi} \frac{Sin.kx}{Sin.x} F(x)\,dx = Cos.\{(k-1)c\pi\}.\int_0^{\pi} \frac{Sin.ky}{Sin.y} F(c\pi + y)\,dy$$

en dus wordt (q)

$$I_8 = \int_0^{\pi} \frac{Sin.kx}{Sin.x} F(x)dx + Cos.\{(k-1)\pi\}.\int_0^{\pi} \frac{Sin.kx}{Sin.x} F(\pi+x)dx + Cos.\{(k-1)2\pi\}.\int_0^{\pi} \frac{Sin.kx}{Sin.x} F(2\pi+x)dx + \ldots$$

$$+ Cos.\{(k-1)(b-1)\pi\}.\int_0^{\pi} \frac{Sin.kx}{Sin.x} F\{(b-1)\pi + x\}\,dx\,, \quad (\text{Lim.}\,k = \infty)$$

of, daar $Cos.\{(k-1)2c\pi\} = 1$, $Cos.\{(k-1)(2c-1)\pi\} = Cos.\{(k-1)\pi\}$ is, wanneer men tevens de uitkomst van vergelijking (XII) gebruikt:

$$I_8 = \frac{\pi}{2}[F(o) + Cos.\{(k-1)\pi\}.f(\pi)] + \frac{\pi}{2} Cos.\{(k-1)\pi\}.[F(\pi) + Cos.\{(k-1)\pi\}.F(2\pi)] +$$

$$+ \frac{\pi}{2} Cos.\{(k-1)2\pi\}.[F(2\pi) + Cos.\{(k-1)\pi\}.F(3\pi)]$$

$$+ \ldots + \frac{\pi}{2} Cos.\{(b-1)(k-1)\pi\}.[F\{(b-1)\pi\} + Cos.\{(k-1)\pi\}.F(b\pi)]\,;$$

of daar $Cos.\{l(k-1)\pi\}.Cos.\{(k-1)\pi\} = Cos.\{(l-1)(k-1)\pi\}$ is,

$$I_8 = \int_0^{b\pi} \frac{Sin.kx}{Sin.x} F(x)dx = \frac{\pi}{2}[F(o) + 2Cos.\{(k-1)\pi\}.F(\pi) + 2F(2\pi) + 2Cos.\{(k-1)\pi\}.F(3\pi) +$$

$$+ \ldots + 2\,Cos.\{(b-1)(k-1)\pi\}.F\{(b-1)\pi\} + Cos.\{b(k-1)\pi\}.F(b\pi)]$$

$$= \frac{\pi}{2}[\{F(o) + 2F(2\pi) + 2F(4\pi) + \ldots\} + 2\,Cos.\{(k-1)\pi\}.\{F(\pi) + F(3\pi) + \ldots\} +$$

$$+ Cos.\{b(k-1)\pi\}.F(b\pi)]. \quad \text{Lim.}\,k = \infty \,\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (XV)$$

Hier komt weder het onderscheid tusschen k even en oneven te pas; want de factor $Cos.\{(k-1)\pi\}$ hangt daarvan af; is k even, zoo is die factor -1, terwijl hij $+1$ wordt voor k oneven. Daarenboven wordt voor k even

Cos. $\{b(k-1)\pi\}$ gelijk ± 1 naarmate b even of oneven is, omdat daarmede tevens $b(k-1)$ even of oneven is; was k daarentegen oneven zoo is $b(k-1)$ altijd even, en dus in dat geval *Cos.* $\{b(k-1)\pi\}$ gelijk $+1$. Dit te zamenvattende komt men tot de drie volgende uitkomsten:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^{b\pi} \frac{Sin.\{(2k-1)x\}}{Sin.\,x} F(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\left[F(o)+2F(\pi)+2F(2\pi)+\dots+2F\{(b-1)\pi\}+F(b\pi)\right],\\
&\int_0^{2b\pi} \frac{Sin.\,2kx}{Sin.\,x} F(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\left[F(o)-2F(\pi)+2F(2\pi)-\dots-2F\{(2b-1)\pi\}+F(2b\pi)\right],\\
&\int_0^{(2b+1)\pi} \frac{Sin.\,2kx}{Sin.\,x} F(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\left[F(o)-2F(\pi)+2F(2\pi)-\dots+2F(2b\pi)-F\{(2b+1)\pi\}\right].
\end{aligned}\right\}, (\text{Lim.}\,k=\infty) \quad \dots (XVI)$$

Weet men daarentegen niet of k even, dan wel oneven zij, zoo wordt de uitkomst van vergelijking (XV) eene onbepaalde, tenzij altijd $F\{(2h+1)\pi\} = 0$ is (voor $2h+1 < b$); men moet dan nog onderscheiden of b even zij of niet wegens den laatsten term van (XV) namelijk *Cos.* $\{b(k-1)\pi\}.F(b\pi)$. Is b toch even, zoo wordt *Cos.* $\{b(k-1)\pi\} = 1$; is b oneven, zoo wordt die factor wel onbepaald (dat is ± 1), maar $F(b\pi)$ verdwijnt alsdan. Daardoor is:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^{2b\pi} \frac{Sin.\,kx}{Sin.\,x} F(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\left[F(o)+2F(2\pi)+\dots+2F\{(2b-2)\pi\}+F(2b\pi)\right],\\
&\int_0^{(2b+1)\pi} \frac{Sin.\,kx}{Sin.\,x} F(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\left[F(o)+2F(2\pi)+\dots+2F(2b\pi)\right],\\
&\qquad\qquad \text{als } F\{(2h+1)\pi\} = 0,\ h \leqq b;\ \text{anders is}\\
&\int_0^{b\pi} \frac{Sin.\,kx}{Sin.\,x} F(x)\,dx = \text{onbepaald, als niet altijd } F\{(2h+1)\pi\}=0 \text{ is.} (2h+1<b).
\end{aligned}\right\}, (\text{Lim.}\,k=\infty) \quad \dots (XVII)$$

Eindelijk blijft er nog het geval over, dat $a = b\pi + c$ is $(c < \pi)$; alsdan kan men den grensafstand o tot $b\pi + c$ gevoegelijk in twee deelen verdeelen, namelijk van o tot $b\pi$ en van $b\pi$ tot $b\pi + c$, dat is:

$$I_9 = \int_0^{b\pi+c} \frac{Sin.\,kx}{Sin.\,x} F(x)\,dx = \int_0^{b\pi} \frac{Sin.\,kx}{Sin.\,x} F(x)\,dx + \int_{b\pi}^{b\pi+c} \frac{Sin.\,kx}{Sin.\,x} F(x)\,dx \ . \ (\text{Lim.}\,k=\infty)$$

Stel in de laatste integraal dezer vergelijking $x = b\pi + y$, dan worden

o en c de grenzen van y; verder is $dx = dy$, $\frac{Sin. kx}{Sin. x} = \frac{Sin. \{kb\pi + ky\}}{Sin. (b\pi + y)} = \frac{Cos. kb\pi. Sin. ky}{Cos. b\pi. Sin. y}$ $= \frac{Cos. kb\pi. Sin. ky. Cos. b\pi}{Cos.^2 b\pi. Sin. y} = \frac{Cos. \{(k-1) b\pi\}. Sin. ky}{Sin. y}$; dit alles substituerende komt er:

$$I_9 = \int_0^{b\pi} \frac{Sin. kx}{Sin. x} F(x) dx + Cos. \{(k-1) b\pi\}. \int_0^{c} \frac{Sin. kx}{Sin. x} F(b\pi + x) dx \ . \ (\text{Lim. } k = \infty)$$

En nu zijn de beide integralen tot eenen vorm terug gebragt, waarin zij reeds vroeger bepaald zijn, namelijk de eerste door de formulen (XV), (XVI), (XVII) en de tweede door de formule (XI); men moet dus ook hier een onderscheid maken tusschen de verschillende gevallen, die in de vergelijkingen (XVI) en (XVII) voorkomen, en heeft alzoo:

$$\int_0^{b\pi+c} \frac{Sin. \{(2k+1)x\}}{Sin. x} F(x) dx = \frac{\pi}{2}\left[F(o) + 2F(\pi) + 2F(2\pi) + \ldots + 2F(b\pi)\right],$$

$$\int_0^{2b\pi+c} \frac{Sin. 2kx}{Sin. x} F(x) dx = \frac{\pi}{2}\left[F(o) - 2F(\pi) + 2F(2\pi) - \ldots + 2F(2b\pi)\right],$$

$$\int_0^{(2b+1)\pi+c} \frac{Sin\ 2kx}{Sin. x} F(x) dx = \frac{\pi}{2}\left[F(o) - 2F(\pi) + 2F(2\pi) - \ldots - 2F\{(2b+1)\pi\}\right],$$

$$\int_0^{2b\pi+c} \frac{Sin. kx}{Sin. x} F(x) dx = \frac{\pi}{2}\left[F(o) + 2F(2\pi) + \ldots + 2F(2b\pi)\right], \quad (\text{Lim. } k = \infty)$$

$$\int_0^{(2b+1)\pi+c} \frac{Sin. kx}{Sin. x} F(x) dx = \frac{\pi}{2}\left[F(o) + 2F(2\pi) + \ldots + 2F(2b\pi)\right], \quad \ldots \text{(XVIII)}$$

De beide laatste integralen gelden, wanneer altijd $F\{(2h+1)\pi\} = 0$ is, voor $h \leqq b$; anders is:

$$\int_0^{b\pi+c} \frac{Sin. kx}{Sin. x} F(x) dx = \text{onbepaald, indien niet altijd } F\{(2h+1)\pi\} = 0$$

is. $(2h + 1 \leqq b)$.

En hiermede is de integraal voor alle gevallen overwogen, waarbij gebleken is, welken invloed het even of oneven zijn van k uitoefent, en hoe daarbij nog de toestand der grenzen in aanmerking moet genomen worden. Om te zien of het geval van $a = \infty$ zich uit het vorige laat afleiden, dient men zich tot de vergelijkingen (XVIII) te wenden, waar a den vorm $b\pi + c$ heeft;

men moet dan daarin b tot oneindig laten aangroeijen; men kan alsdan geen onderscheid meer maken tusschen b even of oneven, en dit behoeft hier ook niet, daar de tweede en derde, evenzoo de vierde en vijfde der vergelijkingen (XVIII) telkens tot dezelfde uitkomsten leiden, als b oneindig wordt; men heeft dus eindelijk:

$$\left.\begin{array}{l} \int_0^\infty \frac{Sin.\{(2k+1)x\}}{Sin.x} F(x)\,dx = \frac{\pi}{2}[F(o)+2F(\pi)+2F(2\pi)+\ldots], \\ \int_0^\infty \frac{Sin.2kx}{Sin.x} F(x)\,dx = \frac{\pi}{2}[F(o)-2F(\pi)+2F(2\pi)-\ldots], \\ \int \frac{Sin.kx}{Sin.x} F(x)\,dx = \frac{\pi}{2}[F(o)+2F(2\pi)+2F(4\pi)+\ldots];\ \text{wanneer steeds} \\ \qquad F\{(2h+1)\pi\}=0\ \text{is},\ (0<h<\infty),\ \text{anders is die integraal} \\ \qquad =\infty. \end{array}\right\}, (\text{Lim.}k=\infty) \quad \ldots (XIX)$$

Bij alle de vergelijkingen (XI) tot (XIX) wordt ondersteld, dat $F(x)$ stadig is tusschen de grenzen der integratie.

7. Verder in de algemeene vergelijking (VI) $f(x) = \frac{x}{Cos.x} F(x)$ stellende, heeft men de integraal

$$\int_0^a \frac{Cos.kx}{Cos.x} F(x)\,dx, \quad (\text{Lim.}k=\infty)$$

te beschouwen. Deze kan men geschiktelijk afleiden uit de integraal in het vorige nummer behandeld; en wel door het stellen van $x = \frac{\pi}{2} + y$; dan is $dx = dy$, met $-\frac{\pi}{2}$ en $a - \frac{\pi}{2}$ als grenzen van y; verder is $Cos.x = -Sin.y$, $Cos.kx = Cos.(\frac{1}{2}k\pi + ky)$. En hierin zullen de uitkomsten geheel verschillende vormen verkrijgen, naarmate k is van den vorm $4k'$, $4k'+1$, $4k'+2$, $4k'+3$ respectievelijk, want voor

$$\left.\begin{array}{llll} 1^\circ\ k=4k',\ \text{is}\ Cos.(\frac{1}{2}k\pi+ky) & = Cos.\{2k'\pi+4k'y\} & = Cos.4k'y & , \\ 2^\circ\ k=4k'+1, & = Cos.\{2k'\pi+\frac{1}{2}\pi+(4k'+1)y\} & = -Sin.\{(4k'+1)y\}, & \\ 3^\circ\ k=4k'+2, & = Cos.\{(2k'+1)\pi+(4k'+2)y\} & = -Cos.\{(4k'+2)y\}, & \\ 4^\circ\ k=4k'+3=4k'-1 & = Cos.\{2k'\pi-\frac{1}{2}\pi+(4k'-1)y\} & = Sin.\{(4k'-1)y\}. & \end{array}\right\}, (r)$$

Bij de tweede en vierde onderstelling wordt de integraal van denzelfden

vorm, als in N°. 6 behandeld is: bij de eerste en derde onderstelling daarentegen komt er eene *Cosinus* in den teller; men zal dus beide soort van vormen afzonderlijk moeten nagaan, en daartoe met de tweede en vierde der onderstellingen (r) moeten aanvangen. Alsdan is

$$\left.\begin{aligned}
I_{1\,0} &= \int_0^a \frac{Cos.\{(4k+1)x\}}{Cos.x} F(x)\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{a-\frac{\pi}{2}} \frac{-Sin.\{(4k+1)y\}}{-Sin.y} F\left(\frac{\pi}{2}+y\right)dy \\
&= \int_0^{a-\frac{\pi}{2}} \frac{Sin.\{(4k+1)y\}}{Sin.y} F\left(\frac{\pi}{2}+y\right)dy + \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{0} \frac{Sin.\{(4k+1)y\}}{Sin.y} F\left(\frac{\pi}{2}+y\right)dy, \\
I_{1\,1} &= \int_0^a \frac{Cos.\{(4k-1)x\}}{Cos.x} F(x)\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{a-\frac{\pi}{2}} \frac{Sin.\{(4k-1)y\}}{-Sin.y} F\left(\frac{\pi}{2}+y\right)dy \\
&= -\int_0^{a-\frac{\pi}{2}} \frac{Sin.\{(4k-1)y\}}{Sin.y} F\left(\frac{\pi}{2}+y\right)dy - \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{0} \frac{Sin.\{(4k-1)y\}}{Sin.y} F\left(\frac{\pi}{2}+y\right)dy.
\end{aligned}\right\}, (\text{Lim.}k=\infty)$$

Stelt men in de laatste integralen dezer beide vergelijkingen, $y=-x$, $dy=-dx$, met $\frac{1}{2}\pi$ en 0 als grenzen van x, zoo worden zij:

$$\left.\begin{aligned}
I_{1\,0} &= \int_0^{a-\frac{\pi}{2}} \frac{Sin.\{(4k+1)x\}}{Sin.x} F\left(\frac{\pi}{2}+x\right)dx + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{Sin.\{(4k+1)x\}}{Sin.x} F\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx, \\
I_{1\,1} &= -\int_0^{a-\frac{\pi}{2}} \frac{Sin.\{(4k-1)x\}}{Sin.x} F\left(\frac{\pi}{2}+x\right)dx - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{Sin.\{(4k-1)x\}}{Sin.x} F\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx;
\end{aligned}\right\}, (\text{Lim.}k=\infty) \quad \ldots\ldots (s)$$

en nu kan men beide laatste integralen uitdrukken door $\frac{\pi}{2}\,F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ volgens de waarde in vergelijking (XI) gevonden. Wat de eerste integralen betreft, moet vooreerst $a-\frac{\pi}{2}$ positief zijn; ten einde vervolgens tot de verschillende gevallen van het vorige nummer te komen, stelle men:

$$\frac{\pi}{2}<a<\frac{3\pi}{2}\,,\ a=\frac{3\pi}{2}\,,\ a=\frac{2b+1}{2}\pi\,,\ a=\frac{2b+1}{2}\pi+c\,,\ a=\infty\,;$$

want dan wordt de bovenste grens der integratie respective:

$$0<a-\frac{\pi}{2}<\pi\,,\ a-\frac{\pi}{2}=\pi\,,\ a-\frac{\pi}{2}=b\pi\,,\ a-\frac{\pi}{2}=b\pi+c\,,\ a-\frac{\pi}{2}=\infty\,;$$

en men heeft dus naar de vergelijkingen (XI), (XIII, 2), (XVI, 1), (XVIII, 1), (XIX, 1), die hier alleen gebruikt kunnen worden omdat $4k+1$ en $4k-1$ oneven zijn, — wanneer men de beide integralen I_{10} en I_{11} onder éénen vorm met het teeken $\pm$ vereenigt:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^a \frac{Cos.\{(4k\pm 1)x\}}{Cos.x} F(x)\,dx = \pm\frac{\pi}{2}F\left(\frac{\pi}{2}\right) \pm \frac{\pi}{2}F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pm\pi F\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad , \frac{\pi}{2} < a < \frac{3\pi}{2};\\
&\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{Cos.\{(4k\pm 1)x\}}{Cos.x} F(x)\,dx = \pm\frac{\pi}{2}F\left[\left(\frac{\pi}{2}\right) + F\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right] \pm \frac{\pi}{2}F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pm\frac{\pi}{2}\left[2F\left(\frac{\pi}{2}\right) + F\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right],\\
&\int_0^{\frac{2b+1}{2}\pi} \frac{Cos.\{(4k\pm 1)x\}}{Cos.x} F(x)\,dx = \pm\frac{\pi}{2}\left[F\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2F\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 2F\left(\frac{5\pi}{2}\right) + \ldots + 2F\left(\frac{2b-1}{2}\pi\right) + \right.\\
&\qquad\qquad \left. + F\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right)\right] \pm \frac{\pi}{2}F\left(\frac{\pi}{2}\right)\\
&\qquad = \pm\frac{\pi}{2}\left[2F\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2F\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 2F\left(\frac{5\pi}{2}\right) + \ldots + 2F\left(\frac{2b-1}{2}\pi\right) + F\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right)\right],\\
&\int_0^{\frac{2b+1}{2}\pi + c} \frac{Cos.\{(4k\pm 1)x\}}{Cos.x} F(x)\,dx = \pm\frac{\pi}{2}\left[F\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2F\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 2F\left(\frac{5\pi}{2}\right) + \ldots + 2F\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right)\right] \pm \frac{\pi}{2}F\left(\frac{\pi}{2}\right)\\
&\qquad = \pm\pi\left[F\left(\frac{\pi}{2}\right) + F\left(\frac{3\pi}{2}\right) + F\left(\frac{5\pi}{2}\right) + \ldots + F\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right)\right],\\
&\int_0^{\infty} \frac{Cos.\{(4k\pm 1)x\}}{Cos.x} F(x)\,dx = \pm\frac{\pi}{2}\left[F\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2F\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 2F\left(\frac{5\pi}{2}\right) + \ldots\right] \pm \frac{\pi}{2}F\left(\frac{\pi}{2}\right)\\
&\qquad = \pm\pi\left[F\left(\frac{\pi}{2}\right) + F\left(\frac{3\pi}{2}\right) + F\left(\frac{5\pi}{2}\right) + \ldots\right].
\end{aligned}\right\} , (\text{Lim. } k = \infty) \ldots\ldots (XX)$$

Er blijft nog een geval over, wanneer namelijk $a = \frac{1}{2}\pi$ is; alsdan $a - \frac{1}{2}\pi = 0$, en verdwijnen dus de eerste integralen in de vergelijkingen (s), zoodat

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Cos.\{(4k\pm 1)x\}}{Cos.x} F(x)\,dx = \pm\frac{\pi}{2}F\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad . \ (\text{Lim. } k = \infty) \ldots\ldots (XXI)$$

Wat de beide andere onderstellingen aanbelangt, deze voeren tot integralen van den vorm

$$\int_0^a \frac{Cos.kx}{Sin.x} F(x)\,dx \quad , \ (\text{Lim. } k = \infty)$$

die eerst naderhand zullen worden behandeld; men moet hier dus anders te werk gaan. Uit de goniometrische vergelijkingen

$$Cos. 4kx = Cos.\{(4k+1)x\}.Cos.x + Sin.\{(4k+1)x\}.Sin.x,$$
$$Cos.\{(4k+2)x\} = Cos.\{(4k+1)x\}.Cos.x - Sin.\{(4k+1)x\}.Sin.x,$$

volgt vooreerst

$$\left.\begin{aligned} I_{12} &= \int_0^a \frac{Cos. 4kx}{Cos. x} F(x)\,dx = \int_0^a Cos.\{(4k+1)x\}.F(x)\,dx + \\ &\qquad + \int_0^a \frac{Sin.\{(4k+1)x\}}{Cos. x} Sin.x.F(x)\,dx, \\ I_{13} &= \int_0^a \frac{Cos.\{(4k+2)x\}}{Cos. x} F(x)\,dx = \int_0^a Cos.\{(4k+1)x\}.F(x)\,dx - \\ &\qquad - \int_0^a \frac{Sin.\{(4k+1)x\}}{Cos. x} Sin.x.F(x)\,dx. \end{aligned}\right\} ,(\text{Lim.}k = \infty) \;\; \ldots\ldots (t)$$

De eerste integraal in het tweede lid dezer vergelijkingen is nul, volgens de formule (VIII) van N°. 4: de tweede integraal moet men uit de formulen in N°. 5 en 6 afleiden door aldaar respective $F(x) = Tang.\,x.F(x)$ en $F(x) = Sin.x \frac{Sin.x}{Cos.x} F(x) = \frac{Sin.^2 x}{Cos.x} F(x)$ aan te nemen.

De integraal

$$I_{14} = \int_0^a \frac{Sin.kx}{Cos.x} Sin.x.F(x)\,dx = \int_0^a Sin.kx.Tang.x.F(x)\,dx$$

wordt onstadig voor $x = \frac{2b+1}{2}\pi$; en men moet dus eerst het theorema (X) raadplegen, in hoeverre hier aan de vergelijking Lim. $\delta F(k \pm \delta)$ voldaan wordt. Deze toch wordt hier

$$0 = \text{Lim.}\delta.\frac{Sin.\left(\frac{2b+1}{2}\pi \pm \delta\right)}{Cos.\left(\frac{2b+1}{2}\pi \pm \delta\right)} F\left(\frac{2b+1}{2}\pi \pm \delta\right) = \text{Lim.}\delta \frac{Sin.\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right).Cos.\delta}{\mp Sin.\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right).Sin.\delta} F\left(\frac{2b+1}{2}\pi \pm \delta\right) =$$

$$= \text{Lim.}\frac{\delta}{\mp Tang.\delta} F\left(\frac{2b+1}{2}\pi \pm \delta\right) = \mp \text{Lim.}\frac{\delta}{Tang.\delta}.\text{Lim.}F\left(\frac{2b+1}{2}\pi \pm \delta\right) \;.\; (\text{Lim.}\,\delta = 0)$$

Om aan deze voorwaardensvergelijking te voldoen, waarin $\text{Lim.} \frac{\delta}{Tang.\delta} = 1$ is, moet $\text{Lim.F}\left(\frac{2b+1}{2}\pi \pm \delta\right) = 0$ zijn, dat is $\text{F}\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right) = 0$; derhalve

$$I_{14} = \int_0^a Sin.kx.Tang.x.\text{F}(x)\,dx = 0, \text{ als F}\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right) = 0 \text{ is. } (\text{Lim.}k = \infty) \quad . \; . \; (\text{XXII})$$

Wanneer daarentegen $\text{F}\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right)$ niet altijd nul is, zoo leert ons de vergelijking (X) niets meer, en men moet tot N°. 6 overgaan. Vooreerst volgt uit (XI), daar voor a kleiner dan $\frac{1}{2}\pi$ de functie $\frac{Sin.^2 x}{Cos.x}\text{F}(x)$ stadig blijft, en die vergelijking alzoo hier geldig is:

$$\int_0^a Sin.kx.Tang.x.\text{F}(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\frac{Sin.^2 o}{Cos.o}\text{F}(o) = 0 \;,\; a < \tfrac{1}{2}\pi \;. \quad (\text{Lim.}k = \infty) \; . \; . \; (\text{XXIII})$$

Voor alle volgende vergelijkingen is F ($b\,\pi$)

$$\frac{Sin.^2 b\pi}{Cos.b\pi}\text{F}(b\pi) = \frac{0}{1}\text{F}(b\pi) = 0,.$$

als F (x) stadig is, en worden dus de waarden der integralen allen nul; maar voor alle waarden van $x = \frac{2b+1}{2}\pi$ wordt dezelfde F (x)

$$\frac{Sin.^2\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right)}{Cos.\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right)}\text{F}\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right) = \frac{+1}{0}\text{F}\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right) = \infty, \text{ als F}\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right) \text{niet altijd nul is;}$$

en daaruit volgt:

$$\int_0^a Sin.kx.Tang.x.\text{F}(x)\,dx = \infty, \text{ als F}\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right) \text{ niet altijd nul is. } (\text{Lim.}k = \infty) \; . (\text{XXIV})$$

Volgens deze vergelijkingen (XXII) tot (XXIV) gaan nu de vergelijkingen (t) over in de volgende:

$$\left.\begin{array}{ll}
\displaystyle\int_0^a \frac{Cos.\,4\,k\,x}{Cos.\,x} \mathrm{F}(x)\,d\,x = 0 & ,\ a < \tfrac{1}{2}\pi; \\
\qquad\qquad\qquad = 0\,, & \\
\qquad\qquad\qquad = \infty\,. & ,\ \tfrac{1}{2}\pi \leqq a < \infty, \text{ naarmate } \mathrm{F}\left(\dfrac{2b+1}{2}\pi\right) \\
\displaystyle\int^a \frac{Cos.\{(4k+2)x\}}{Cos.\,x} \mathrm{F}(x)dx = 0\,, & \text{altijd of niet altijd nul is.} \\
\qquad\qquad\qquad = -\infty, & \\
\qquad\qquad\qquad = 0 & ,\ a < \tfrac{1}{2}\pi;
\end{array}\right\} ,\ (\text{Lim. } k = \infty) \ \ldots\ldots (\text{XXV})$$

Dit verschil tusschen de stelsels vergelijkingen (XX) en (XXV) doet genoegzaam den invloed van den vorm van k op de waarde der hier behandelde integraal kennen, waarbij altijd $\mathrm{F}(x)$ stadig is ondersteld tusschen de grenzen der integratie.

8. Stellen wij nu in de integraal (IV) $f(x) = \dfrac{x}{Cos.\,x} . \mathrm{F}(x)$, dan wordt deze

$$\int_0^a \frac{Sin.\,k\,x}{Cos.\,x} \mathrm{F}(x)\,d\,x = 0 \quad , \quad 0 < a < \tfrac{1}{2}\pi; \ (\text{Lim. } k = \infty) \ldots\ldots (\text{XXVI})$$

maar dit alleen zoo lang $f(x)$ stadig is tusschen de grenzen der integratie; daar nu voor $x = \frac{1}{2}\pi$, $Cos.\,x$ nul en dus de functie oneindig wordt, moet in de vorige vergelijking a kleiner dan $\frac{1}{2}\pi$ blijven. Voor a grooter dan, of gelijk aan $\frac{1}{2}\pi$ is dus eene nieuwe onderzoeking noodig; daartoe gebruike men de goniometrische formule

$$Sin.\,k\,x = Sin.\,\{(k-1)\,x\}.\,Cos.\,x + Cos.\,\{(k-1)\,x\}.\,Sin.\,x\,;$$

dan is:

$$\mathrm{I}_{15} = \int_0^a Sin.\{(k-1)x\}.\mathrm{F}(x)\,dx + \int_0^a \frac{Cos.\{(k-1)\,x\}}{Cos.\,x} Sin.x.\mathrm{F}(x)\,dx. \quad (\text{Lim. } k = \infty)\ .\ (u)$$

De algemeene vergelijking (X) leert ons, dat de eerste integraal nul is, zoo lang $\mathrm{F}(x)$ stadig blijft tusschen de grenzen van het integreren, en dit zal men toch bij de tweede integraal moeten onderstellen, want deze is een bijzonder geval van de formulen van het vorige nummer: men moet dáár slechts voor $\mathrm{F}(x)$ stellen $Sin.\,x.\,\mathrm{F}(x)$. Zij dus vooreerst in (u) $k' = 4\,k \pm 1$, dan wordt $k' - 1 = 4\,k$ of $4\,k - 2$, en derhalve volgens de vergelijkingen (XXV):

$$\left.\begin{aligned}\int_0^a \frac{Sin.\{(4k\pm1)x\}}{Cos.\,x} F(x)\,dx &= 0\ , \qquad a \leqq \tfrac{1}{2}\pi\ ; \\ &\left.\begin{aligned}&= 0\ ,\\ &= \pm\infty.\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}\pi \leqq a < \infty\ ,\ \text{naarmate } F\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right)\\ &\text{altijd nul is of niet.}\end{aligned}\end{aligned}\right\}, (\text{Lim.}k=\infty) \ . \ . \ (\text{XXVII})$$

Zij vervolgens $k' = 4k$ of $= 4k+2$, zoo wordt $k'-1 = 4k \mp 1$ en dus naar de vergelijkingen (XXI) en (XX), daar $F\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right)$ hier

$$Sin.\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right).F\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right) = Cos.b\pi.F\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right) \text{ wordt, } \ . \ . \ . \ . \ . \ (v)$$

$$\left.\begin{aligned}-\int_0^a \frac{Sin.\,4kx}{Cos.\,x}F(x)\,dx = +\int_0^a \frac{Sin.\,\{(4k+2)x\}}{Cos.\,x}F(x)\,dx &= \\ = \frac{\pi}{2}F\left(\frac{\pi}{2}\right) \qquad &,\ a = \tfrac{1}{2}\pi\ ; \\ = \pi F\left(\frac{\pi}{2}\right) \qquad &,\ \frac{\pi}{2} < a < \frac{3\pi}{2}\ ; \\ = \frac{\pi}{2}\left[2F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right] \qquad &,\ a = \frac{3\pi}{2}\ ; \\ = \frac{\pi}{2}\left[2F\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2F\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \ldots - 2\,Cos.b\pi.F\left(\frac{2b-1}{2}\pi\right) + \right. & \\ \left. + Cos.b\pi.F\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right)\right] &,\ a = \frac{2b+1}{2}\pi\ ; \\ = \pi\left[F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \ldots + Cos.b\pi.F\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right)\right] &,\ a = \frac{2b+1}{2}\pi + c\ ; \\ = \pi\left[F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \ldots \qquad\qquad \right] &,\ a = \infty\ .\end{aligned}\right\} ,(\text{Lim.}k=\infty) \ . \ (\text{XXVIII})$$

F (x) zij steeds stadig tusschen de grenzen der integratie.

9. Eindelijk moet men nog in het theorema (VI) $\frac{x}{Sin.\,x}F(x)$ voor $f(x)$ aannemen om de integraal

$$I_{16} = \int_0^a \frac{Cos.\,kx}{Sin.\,x}F(x)\,dx\ ,\quad (\text{Lim.}\,k=\infty)$$

te verkrijgen, waarover reeds in N°. 7 gesproken werd. Ten einde hare waarde uit het vorige af te leiden, gebruike men de goniometrische formule

$$Cos.kx = Cos.\{(k+1)x\}.Cos.x + Sin.\{(k+1)x\}.Sin.x\,,$$

zoodat

$$I_{16} = \int_0^a \frac{Cos.\{(k+1)x\}}{Sin.x} Cos\ x.F(x)\,dx + \int_0^a Sin.\{(k+1)x\}.F(x)\,dx\,,\ (\text{Lim.}\,k=\infty)\ .\ (w)$$

wordt. Zoolang $F(x)$ tusschen de grenzen 0 en a stadig blijft, en bij deze onderstelling zijn wij toch gedwongen ons te bepalen, wordt de waarde der laatste integraal nul volgens formule (X). Wat de eerste integraal in het tweede lid der vergelijking (w) betreft, namelijk

$$I_{17} = \int_0^a \frac{Cos.\{(k+1)x\}}{Sin.x} Cos.x.F(x)\,dx = \int_0^a Cos.\{(k+1)x\}.Cot.x.F(x)\,dx$$

$$= \int_0^a \frac{Cos.\{(k+1)x\}}{Cos.x}.\frac{Cos.^2 x}{Sin.x} F(x)\,dx\,,$$

hierin blijkt vooreerst dat voor $x = b\pi$ telkens de geintregeerde functie onstadig wordt; het theorema (IX) zal ons dus moeten leeren, van welken invloed dit op de waarde der integraat zij. De voorwaarden-grensvergelijking $\text{Lim.}\,\delta F(h \pm \delta) = 0$, wordt dus hier:

$$0 = \text{Lim.}\delta\,Cot.(b\pi \pm \delta).F(b\pi \pm \delta) = \text{Lim.}\delta \frac{Cos.(b\pi \pm \delta)}{Sin.(b\pi \pm \delta)} F(b\pi \pm \delta) = \text{Lim.}\delta \frac{Cos.b\pi.Cos.\delta}{\pm Cos.b\pi.Sin.\delta} F(b\pi \pm \delta)$$

$$= \pm\,\text{Lim.}\frac{\delta}{Tang.\delta}.\text{Lim.}F(b\pi \pm \delta)\ .\qquad (\text{Lim.}\delta = 0)$$

Nu is (even als vroeger N°. 7) $\text{Lim.}\frac{\delta}{Tang.\delta} = 1$, dus moet $\text{Lim.}F(b\pi \pm \delta) = 0$, dat is $F(b\pi) = 0$ zijn, om aan de vergelijking (IX) te kunnen voldoen; maar alsdan wordt ook:

$$\int_0^a Cos.kx.Cot.x.F(x)\,dx = 0,\ \text{als } F(b\pi) \text{ altijd 0 is. } (\text{Lim.}\,k=\infty).\ .\ .\ .\ .\ (XXIX)$$

Wanneer daarentegen niet altijd $F(b\pi)$ nul wordt, moeten wij ons wenden tot N°. 7. Aldaar is dan in het algemeen

$$F\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right)=\frac{Cos.^2\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right)}{Sin.\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right)}F\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right)=\frac{0}{Cos.b\pi}F\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right)=0;$$

maar dezelfde functie wordt reeds onstadig voor $x=\pi$, en verder voor alle $x=b\pi$; want dan is:

$$F(b\pi)=\frac{Cos.^2 b\pi}{Sin.b\pi}F(b\pi)=\frac{1}{0}F(b\pi).$$

Is dan $F(b\pi)$ niet altijd nul, zoo wordt

$$\left.\begin{aligned}\int_0^a Cos.kx.Cot.x.F(x)\,dx&=0\quad, a<\pi;\\ &=\infty, \pi<a<\infty, \text{ indien } F(b\pi) \text{ niet altijd nul is.}\end{aligned}\right\},(\text{Lim}.k=\infty)\ \ldots\ (\text{XXX})$$

Deze uitkomsten (XXIX) en (XXX) in (w) overbrengende, komt er eindelijk

$$\left.\begin{aligned}\int_0^a \frac{Cos.kx}{Sin.x}F(x)\,dx&=0\quad, a<\pi;\\ &\left.\begin{aligned}=0,\\=\infty.\end{aligned}\right\}, \pi<a<\infty, \text{ naarmate } F(b\pi) \text{ altijd nul is of niet.}\end{aligned}\right\},(\text{Lim}.k=\infty)\ \ldots\ (\text{XXXI})$$

Ook hier wordt $F(x)$ ondersteld stadig te blijven tusschen de grenzen van de integratie.

Het is opmerkelijk, dat deze integraal, die zooveel overeenkomst heeft met die van het vorige nummer, tot geheel andere uitkomsten leidt, in zoo verre hier de vorm van k niet in aanmerking kwam, hetgeen daar wel het geval was: overigens bestaat in dit opzigt een groot verschil tusschen de vier gelijkvormige integralen van N°. 6, 7, 8 en 9.

10. Het aangevoerde moge genoegzaam zijn, om te staven wat in den aanvang beweerd is omtrent de oplettendheid, die men moet wijden aan den toestand van de grootheid k, of deze van den vorm $4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3$ zij; men heeft gezien, hoe zeer in sommige gevallen deze vorm invloed had op de waarde, en in andere gevallen de waarde voor alle k dezelfde blijft. Men mag hierbij niet over het hoofd zien, dat k altijd als een geheel getal werd beschouwd, zoodra daarbij bijzondere vormen werden aangenomen, terwijl anders k geheel willekeurig is.

Uit de gegevene theorie van de algemeene integralen

$$\int_0^a Sin.\,kx.f(x)\,dx\,,\quad \int_0^a Sin.\,kx.f(x)\frac{dx}{x}\,,\quad \int_0^a \frac{Sin.\,kx}{Sin.\,x}f(x)\,dx\,,\quad \int_0^a \frac{Sin.\,kx}{Cos.\,x}f(x)\,dx\,,$$

$$\int_0^a Cos.\,kx.f(x)\,dx\,,\quad \int_0^a Cos.\,kx.f(x)\frac{dx}{x}\,,\quad \int_0^a \frac{Cos.\,kx}{Cos.\,x}f(x)\,dx\,,\quad \int_0^a \frac{Cos.\,kx}{Sin.\,x}f(x)\,dx\,,$$

waarbij zich nog voordeden de beide bijzondere vormen

$$\int_0^a Sin.\,kx.\,Tang.\,x.f(x)\,dx \quad \text{en} \quad \int_0^a Cos.\,kx.\,Cot.\,x.f(x)\,dx\,,$$

(waar overal Lim. $k = \infty$), kunnen nu voor elk bijzonder geval de verandering der integralen worden afgeleid.

Men konde zich nog de vraag voorstellen, of niet in plaats van de functie *Sin.* kx of *Cos.* kx eenige andere goniometrische functie *Tang.* kx, *Cot.* kx, *Sec.* kx of *Cosec.* kx in te voeren ware: men ziet echter gemakkelijk in, dat alsdan de uitkomst oneindig zoude worden. Want daar deze laatste functiën of voor $kx = \frac{2b+1}{2}\pi$ of voor $kx = b\pi$ oneindig worden, zoo zal er voor elke x hoe klein deze ook worde aangenomen, k zoo groot kunnen genomen worden, dat kx eene van bovengenoemde waarden verkrijgt, en dus de integraal oneindig wordt. Dit bezwaar zoude vervallen zoodra de bovenste grens van de integratie oneindig klein ware, maar dan worden de integralen tot eene bijzondere soort teruggebragt, die door CAUCHY *Integrales définies singulières* genoemd zijn, en hier niet verder zullen worden nagegaan.

Omdat te gelijk met iedere integraal waarin de factor *Sin.* kx voorkomt, eene andere gelijksoortige gevonden is, die slechts daarin verschilt dat de factor *Cos.* kx den vorigen vervangt, zoo is wegens de formule

$$e^{\pm kxi} = Cos.\,kx \pm i\,Sin.\,kx$$

ook

$$\int_0^a e^{\pm kxi} f(x)\,dx = \int_0^a Cos.\,kx.f(x)\,dx \pm i\int_0^a Sin.\,kx.f(x)\,dx.$$

Daardoor geven de theorema's (IX) en (X):

$$\int_b^a e^{\pm kxi}\,F(x)\,dx = 0. \quad (\text{Lim.}\, k = \infty).$$

Wordt $F(x)$ voor $b, a,$ of h $(a > h > b)$ onstadig, zoo moet nog respective Lim. $\delta\,F\,(b+\delta) = 0$, Lim. $\delta\,F\,(a-\delta) = 0$, Lim. $\delta\,F\,(h \pm \delta) = 0$ wezen voor Lim. $\delta = 0$; b kan ook nul zijn. (XXXII)

Evenzoo (IV) en (VI):

$$\int_0^a e^{\pm kxi} f(x) \frac{dx}{x} = \infty \, . \, \pi f(0) \; . \quad (\text{Lim.} \, k = \infty) \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (\text{XXXIII})$$

Verder uit de theorema's (XI), (XII), (XV), (XVIII) en (XIX) verbonden met (XXXI):

$$\left.\begin{aligned} \int_0^a e^{\pm kxi} \mathrm{F}(x) \frac{dx}{Sin.\, x} &= \pm \frac{1}{2} \pi i \mathrm{F}(0) \; , \quad 0 < a < \pi; \\ &= \pm \tfrac{1}{2} \pi i \mathrm{F}(0), \\ &= \infty \end{aligned}\right\} \; , \pi < a < \infty \, , \text{ naarmate } \mathrm{F}(b\pi) \text{ altijd of niet altijd nul is.} \quad , (\text{Lim.} \, k = \infty) \; . \; (\text{XXXIV})$$

Eindelijk geven (XX), (XXI) en (XXV) verbonden met (XXVI,) (XXVII) en (XXVIII):

$$\left.\begin{aligned} \int^a e^{\pm kxi} \mathrm{F}(x) \frac{dx}{Cos.\, x} &= 0 \\ &= \infty \end{aligned}\right\} , (\text{Lim.} \, k = \infty), 0 < a < \infty, \text{ naarmate } \mathrm{F}\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right) \text{ altijd nul is of niet.} \quad (\text{XXXV})$$

Het is opmerkelijk, dat hier alle onderscheid tusschen de verschillende vormen van k ten eenenmale wegvalt, hetgeen dan eens aan de integralen met $Cos.\, kx$, dan weder aan die met $Sin.\, kx$ te wijten is.

11. Hoewel in het voorgaande reeds onderscheidene toepassingen voorkomen van de hoofdvergelijkingen zelve, zal het misschien niet ondienstig zijn eene regtstreeksche toepassing aan te voeren, die meermalen voorkomt, maar dikwerf met uitkomsten, die van de hier gegevene verschillen. Zij daartoe:

$$\mathrm{F}_1(x) = \frac{Sin.\, x}{1 - 2p\, Cos.\, x + p^2} f(x) \text{ of } \mathrm{F}_2(x) = \frac{Cos.\, x}{1 - 2p\, Cos.\, x + p^2} fx.$$

Opdat deze functie stadig blijve tusschen de grenzen der integratie zal men moeten nagaan: wanneer de noemer $1 - 2p\, Cos.\, x + p^2$ nul kan worden; stelt men daarin $Cos.\, x = 1 - 2\, Sin.^2 \tfrac{1}{2} x$, zoo komt er $(1-p)^2 + 4p\, Sin.^2 \tfrac{1}{2} x$, dus de som van twee vierkanten; derhalve moet elk vierkant op zich zelf nul worden: met den tweeden term $4p\, Sin.^2 \tfrac{1}{2} x$ is dit steeds het geval, zoodra $x = 2b\pi$, dus $Sin.^2 \tfrac{1}{2} x = Sin.^2 b\pi$ is; met den eersten term daarentegen slechts dan, wanneer $p = 1$ is. Om de onstadigheid derhalve te voorkomen, heeft men slechts het geval van $p = +1$ uit te sluiten, dus de voorwaarde te stellen $-\infty < p < +1$, $+1 < p < \infty$. Hierbij is natuurlijk ondersteld, dat $f(x)$ weder stadig blijve tusschen de grenzen van het integreren.

Nu heeft men:

$$F_1(0)=0, F_1(b\pi)=0, F_1\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right)=\frac{Sin.\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right)}{1+p^2}f\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right)=\frac{Cos.\,b\pi}{1+p^2}f\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right),$$

$$F_2(0)=\frac{1}{(1-p)^2}f(0), F_2(2b\pi)=\frac{1}{(1-p)^2}f(2b\pi),$$

$$F_2\{(2b+1)\pi\}=\frac{-1}{(1+p)^2}f\{(2b+1)\pi\}, F_2\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right)=0.$$

En daaruit volgt, naar de vergelijkingen (IV), (IX), (X):

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^a \frac{Sin.\,kx.\,Sin.\,x}{1-2p\,Cos.\,x+p^2}f(x)\frac{dx}{x}=0,\\ &\int_0^a \frac{Sin.\,kx.\,Sin.\,x}{1-2p\,Cos.\,x+p^2}f(x)\frac{dx}{2}=\frac{\pi}{2}\frac{1}{(1-p)^2}f(0),\end{aligned}\right\}, 0<a<\infty\ , (\text{Lim.}\,k=\infty) \ldots \begin{aligned}&(1)\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)\end{aligned}$$

$$\int_b^a \frac{Cos.\,kx.\,Sin.\,x}{1-2p\,Cos.\,x+p^2}f(x)\,dx=0, \quad (3)$$

$$\int_b^a \frac{Cos.\,kx.\,Cos.\,x}{1-2p\,Cos.\,x+p^2}f(x)\,dx=0, \quad (4)$$

$$\int_b^a \frac{Sin.\,kx.\,Sin.\,x}{1-2p\,Cos.\,x+p^2}f(x)\,dx=0, \quad (5)$$

$$\int_b^a \frac{Sin.\,kx.\,Cos.\,x}{1-2p\,Cos.\,x+p^2}f(x)\,dx=0. \quad (6)$$

Wordt $f(x)$ voor b, a, of h $(a>h>b)$ onstadig, zoo moet nog respective $\text{Lim.}\,\delta f(b+\delta)=0$, $\text{Lim.}\,\delta f(a-\delta)=0$, $\text{Lim.}\,\delta f(h\pm\delta)=0$ zijn, voor $\text{Lim.}\,\delta=0$; b kan ook nul zijn. ($\text{Lim.}\,k=\infty$).

De vergelijkingen (3) en (6) zoowel als (4) en (5), door optelling en aftrekking te zamen verbonden, geven, wanneer men voor $k-1$ of $k+1$ weder eenvoudiger k schrijft:

$$\int_b^a \frac{Sin.\,kx}{1-2p\,Cos.\,x+p^2}f(x)\,dx=0 \quad (7)$$

$$\int_b^a \frac{Cos.\,kx}{1-2p\,Cos.\,x+p^2}f(x)\,dx=0 \quad (8)$$

Wordt $f(x)$ voor b,a, of h $(a>h>b)$ onstadig, zoo moet nog respective $\text{Lim.}\,\delta f(b+\delta)=0$, $\text{Lim.}\,\delta f(a-\delta)=0$, $\text{Lim.}\,\delta f(h\pm\delta)=0$ zijn, voor $\text{Lim.}\,\delta=0$. b kan ook nul zijn. ($\text{Lim.}\,k=\infty$).

Vergelijking (XI) voor $a<\pi$, (XIV, 1) voor $a=\pi$, (XVII, 1) voor $a=2b\pi$, (XVII, 2) voor $a=(2b+1)\pi$, (XVIII, 4) voor $a=2b\pi+c$, (XVIII, 5) voor

$a=(2b+1)\pi+c$ en (XIX, 3) voor $a=\infty$, geven voor de onderstelling $F_1(x)$ nul tot waarde, en dit is reeds in (7) gevonden. Bij de onderstelling $F_2(x)$ daarentegen geven de vergelijkingen (XI), (XIII), (XVI), (XVIII, 1—3) (XIX, 1, 2) het volgende, waarbij somtijds nog het even of oneven zijn van b te onderscheiden viel:

$$\int_0^a \frac{Sin.\,kx.\,Cot.\,x}{1-2p\,Cos.\,x+p^2} f(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\frac{1}{(1-p)^2} f(0) \quad , \quad a<\pi; \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

$$\int_0^\pi \frac{Sin.\,2kx.\,Cot.\,x}{1-2p\,Cos.\,x+p^2} f(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{(1-p)^2} f(0) + \frac{1}{(1+p)^2} f(\pi)\right], \ldots \ldots \quad (10)$$

$$\int_0^\pi \frac{Sin.\{(2k-1)x\}.\,Cot.\,x}{1-2p\,Cos.\,x+p^2} f(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{(1-p)^2} f(0) - \frac{1}{(1+p)^2} f(\pi)\right], \ldots \ldots \quad (11)$$

$$\int_0^{2b\pi} \frac{Sin.\{(2k-1)x\}.\,Cot.\,x}{1-2p\,Cos.\,x+p^2} f(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{(1-p)^2}\left[f(0)+2f(2\pi)+\ldots+2f\{(2b-2)\pi\}+f(2b\pi)\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{(1+p)^2}\left[f(\pi)+f(3\pi)+\ldots+f\{(2b-1)\pi\}\right]\right\}, \ . \ (12)$$

$$\int_0^{(2b+1)\pi} \frac{Sin.\{(2k-1)x\}.\,Cot.\,x}{1-2p\,Cos.\,x+p^2} f(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{(1-p)^2}\left[f(0)+2f(2\pi)+\ldots+2f(2b\pi)\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(1+p)^2}\left[2f(\pi)+2f(3\pi)+\ldots+2f\{(2b-1)\pi\}+f\{(2b+1)\pi\}\right]\right\}, \ . \ (13)$$

$$\int_0^{2b\pi} \frac{Sin.\,2kx.\,Cot.\,x}{1-2p\,Cos.\,x+p^2} f(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{(1-p)^2}\left[f(0)+2f(2\pi)+\ldots+2f\{(2b-2)\pi\}+f(2b\pi)\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{(1+p)^2}\left[f(\pi)+f(3\pi)+\ldots+f\{(2b-1)\pi\}\right]\right\}, \ . \ (14)$$

$$\int_0^{(2b+1)\pi} \frac{Sin.\,2kx.\,Cot.\,x}{1-2p\,Cos.\,x+p^2} f(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{(1-p)^2}\left[f(0)+2f(2\pi)+\ldots+2f(2b\pi)\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(1+p)^2}\left[2f(\pi)+2f(3\pi)+\ldots+2f\{(2b-1)\pi\}+f\{(2b+1)\pi\}\right]\right\}, \ . \ (15)$$

$$\int_0^{2b\pi+c} \frac{Sin.\{(2k-1)x\}.\,Cot.\,x}{1-2p\,Cos.\,x+p^2} f(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{(1-p)^2}\left[f(0)+2f(2\pi)+\ldots+2f(2b\pi)\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{(1+p)^2}\left[f(\pi)+f(3\pi)+\ldots+f\{(2b-1)\pi\}\right]\right\}, \ . \ (16)$$

$$\int_0^{(2b+1)\pi+c} \frac{Sin.\{(2k+1)x\}.Cot.x}{1-2p\,Cos.x+p^2} f(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{(1-p)^2}\left[f(o)+2f(2\pi)+\ldots+2f(2b\pi)\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{2}{(1+p)^2}\left[f(\pi)+f(3\pi)+\ldots+f\{(2b+1)\pi\}\right]\right\}, \ldots(17)$$

$$\int_0^{2b\pi+c} \frac{Sin.2kx.Cot.x}{1-2p\,Cos.x+p^2} f(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{(1-p)^2}\left[f(o)+2f(2\pi)+\ldots+2f(2b\pi)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{(1+p)^2}\left[f(\pi)+f(3\pi)+\ldots+f\{(2b-1)\pi\}\right]\right\}, \ldots(18)$$

$$\int_0^{(2b+1)\pi+c} \frac{Sin.2kx.Cot.x}{1-2p\,Cos.x+p^2} f(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{(1-p)^2}\left[f(o)+2f(2\pi)+\ldots+2f(2b\pi)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{(1+p)^2}\left[f(\pi)+f(3\pi)+\ldots+f\{(2b+1)\pi\}\right]\right\}, \ldots(19)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{Sin.\{(2k-1)x\}.Cot.x}{1-2p\,Cos.x+p^2} f(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{(1-p)^2}\left[f(o)+2f(2\pi)+\ldots\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{2}{(1+p)^2}\left[f(\pi)+f(3\pi)+\ldots\right]\right\}, \ldots(20)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{Sin.2kx.Cot.x}{1-2p\,Cos.x+p^2} f(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{(1-p)^2}\left[f(o)+2f(2\pi)+\ldots\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{(1+p)^2}\left[f(\pi)+f(3\pi)+\ldots\right]\right\}; \ldots(21)$$

overal is Lim. $k=\infty$.

Verder voert bij de vergelijkingen (XX), (XXI) en (XXV, 1, 2, 4, 6) de onderstelling $F_2(x)$ steeds tot eene waarde nul, zoo als reeds in verg. (8) gevonden werd. Daarentegen geeft de andere onderstelling $F_1(x)$ nieuwe uitkomsten. Omdat $F_1\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right)=\frac{Cos.b\pi}{1+p^2}f\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right)$ is, moet men somtijds onderscheid maken tusschen:

$$F_1\left(\frac{4b+1}{2}\pi\right)=\frac{1}{1+p^2}f\left(\frac{4b+1}{2}\pi\right) \text{ en } F_1\left(\frac{4b-1}{2}\pi\right)=\frac{-1}{1+p^2}f\left(\frac{4b-1}{2}\pi\right);$$

en dan verkrijgt men door de vergelijkingen (XX), (XXI) en (XXV):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Cos.\{(4k\pm1)x\}.Tang.x}{1-2p\,Cos.x+p^2} f(x)\,dx = \pm\frac{\pi}{2}\frac{1}{1+p^2} f\left(\frac{\pi}{2}\right), \ldots\ldots\ldots(22)$$

$$\int_0^a \frac{Cos.\{(4k\pm 1)x\}.Tang.x}{1-2p\,Cos.x+p^2} f(x)\,dx = \pm\frac{\pi}{1+p^2} f\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad \frac{\pi}{2}<a<\frac{3\pi}{2}; \quad \ldots\ldots (23)$$

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{Cos.\{(4k\pm 1)x\}.Tang.x}{1-2p\,Cos.x+p^2} f(x)\,dx = \pm\frac{\pi}{2}\frac{1}{1+p^2}\left\{2f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right\}, \quad \ldots\ldots (24)$$

$$\int_0^{\frac{4b+1}{2}\pi} \frac{Cos.\{(4k\pm 1)x\}.Tang.x}{1-2p\,Cos.x+p^2} f(x)\,dx = \pm\frac{\pi}{2}\frac{1}{1+p^2}\Bigg[\left\{2f\left(\frac{\pi}{2}\right)+2f\left(\frac{5\pi}{2}\right)+\ldots\right.$$

$$\left.+2f\left(\frac{4b-3}{2}\pi\right)+f\left(\frac{4b+1}{2}\pi\right)\right\}-2\left\{f\left(\frac{3\pi}{2}\right)+f\left(\frac{7\pi}{2}\right)+\ldots+f\left(\frac{4b-1}{2}\pi\right)\right\}\Bigg], (25)$$

$$\int_0^{\frac{4b-1}{2}\pi} \frac{Cos.\{(4k\pm 1)x\}.Tang.x}{1-2p\,Cos.x+p} f(x)dx = \pm\frac{\pi}{2}\frac{1}{1+p^2}\Bigg[2\left\{f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{5\pi}{2}\right)+\ldots+f\left(\frac{4b-3}{2}\pi\right)\right\}-$$

$$-\left\{2f\left(\frac{3\pi}{2}\right)+2f\left(\frac{7\pi}{2}\right)+\ldots+2f\left(\frac{4b-5}{2}\pi\right)+f\left(\frac{4b-1}{2}\pi\right)\right\}\Bigg], \quad . \ (26)$$

$$\int_0^{\frac{4b+1}{2}\pi+c} \frac{Cos.\{(4k\pm 1)x\}.Tang.x}{1-2p\,Cos.x+p^2} f(x)dx = \pm\frac{\pi}{1+p^2}\Bigg[\left\{f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{5\pi}{2}\right)+\ldots+f\left(\frac{4b+1}{2}\pi\right)\right\}-$$

$$-\left\{f\left(\frac{3\pi}{2}\right)+f\left(\frac{7\pi}{2}\right)+\ldots+f\left(\frac{4b-1}{2}\pi\right)\right\}\Bigg], \quad . \ (27)$$

$$\int_0^{\frac{4b-1}{2}\pi+c} \frac{Cos.\{(4k\pm 1)x\}.Tang.x}{1-2p\,Cos.x+p^2} f(x)dx = \pm\frac{\pi}{1+p^2}\Bigg[\left\{f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{5\pi}{2}\right)+\ldots+f\left(\frac{4b-3}{2}\pi\right)\right\}-$$

$$-\left\{f\left(\frac{3\pi}{2}\right)+f\left(\frac{7\pi}{2}\right)+\ldots+f\left(\frac{4b-1}{2}\right)\pi\right\}\Bigg], \quad . \ (28)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{Cos.\{(4k\pm 1)x\}.Tg.x}{1-2pCos.x+p^2} f(x)dx = \pm\frac{\pi}{1+p^2}\Bigg[\left\{f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{5\pi}{2}\right)+\ldots\right\}-\left\{f\left(\frac{3\pi}{2}\right)+f\left(\frac{7\pi}{2}\right)+\ldots\right\}\Bigg], (29)$$

$$\int_0^a \frac{Cos.\,4kx.\,Tang.x}{1-2p\,Cos.x+p^2} f(x)\,dx = 0, \quad a<\tfrac{1}{2}\pi; \quad \ldots\ldots (30)$$

$$\int_0^a \frac{\{Cos.(4k+2)x\}.Tang.x}{1-2p\,Cos.x+p^2} f(x)\,dx \;\begin{cases} =0, \\ =\infty, \\ =0, \\ =-\infty, \end{cases} \quad , \tfrac{1}{2}\pi \leqq a < \infty, \text{ naarmate } f\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right) \text{ altijd of niet altijd nul is.} \quad (31) \ldots\ldots (32)$$

$$=0. \qquad a<\tfrac{1}{2}\pi \quad \ldots\ldots (33)$$

alwaar overal Lim. $k=\infty$.

Wanneer men $F_2(x)$ in de vergelijkingen (XXVI), (XXVII) en (XXVIII) invoert, wordt men wederom tot de integraal (7) gevoerd; maar de onderstelling $F_1(x)$ geeft integendeel bij die zelfde vergelijkingen:

$$\int_0^a \frac{Sin.\,k\,x.\,Tang.\,x}{1-2\,p\,Cos.\,x+p^2} f(x)\,d\,x = 0 \quad , \quad 0 < a < \tfrac{1}{2}\pi; \; \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \; (34)$$

$$\int_0^a \frac{Sin.\{(4\,k\pm 1)\,x\}.\,Tang.\,x}{1-2\,p\,Cos.\,x+p^2} f(x)\,d\,x = 0\,, \quad = \pm\infty, \left\{ \begin{array}{l} , \tfrac{1}{2}\pi \leqq a < \infty \text{ ,naarmate } f\left(\dfrac{2\,b+1}{2}\pi\right) \text{ altijd} \\ \text{nul is of niet} \; \ldots \ldots \ldots \ldots \; (35) \end{array} \right.$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{Sin.\{(4\,k+1\pm 1)\,x\}.\,Tang.\,x}{1-2\,p\,Cos.\,x+p^2} f(x)\,d\,x = \pm\frac{\pi}{2}\frac{1}{1+p^2} f\left(\frac{\pi}{2}\right), \; \ldots \ldots \ldots \; (36)$$

$$\int_0^a \frac{Sin.\{(4\,k+1\pm 1)x\}.\,Tang.\,x}{1-2\,p\,Cos.\,x+p^2} f(x)\,d\,x = \pm\frac{\pi}{1+p^2} f\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad , \quad \frac{\pi}{2} < a < \frac{3\,\pi}{2}, \; \ldots \; (37)$$

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{Sin.\{(4\,k+1\pm 1)\,x\}.\,Tang.\,x}{1-2\,p\,Cos.\,x+p^2} f(x)\,d\,x = \pm\frac{\pi}{1+p^2}\left[2\,f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{3\,\pi}{2}\right)\right], \; \ldots \; (38)$$

$$\int_0^{\frac{2b+1}{2}\pi} \frac{Sin.\{(4\,k+1\pm 1)\,x\}.\,Tang.\,x}{1-2\,p\,Cos.\,x+p^2} f(x)\,d\,x = \pm\frac{\pi}{2}\frac{1}{1+p^2}\left[2\,f\left(\frac{\pi}{2}\right)+2\,f\left(\frac{3\,\pi}{2}\right)+\ldots\right.$$

$$\left. +\,2\,f\left(\frac{2\,b-1}{2}\pi\right)+f\left(\frac{2\,b+1}{2}\pi\right)\right], \; \ldots (39)$$

$$\int_0^{\frac{2b+1}{2}\pi+c} \frac{Sin.\{(4k+1\pm 1)x\}.\,Tang\,x}{1-2\,p\,Cos.\,x+p^2} f(x)dx = \pm\frac{\pi}{1+p^2}\left[f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{3\pi}{2}\right)+\ldots+f\left(\frac{2\,b+1}{2}\pi\right)\right], (40)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{Sin.\{(4\,k+1\pm 1)x\}.\,Tang.\,x}{1-2\,p\,Cos.\,x+p^2} f(x)\,d\,x = \pm\frac{\pi}{1+p^2}\left[f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{3\,\pi}{2}\right)+\ldots\right] \; \ldots \ldots \; (41)$$

Hier is ook overal Lim. $k = \infty$.

Eindelijk gebruike men de formule (XXXI). Bij de onderstelling $F_1(x)$ komt men wederom terug tot de integraal (8); bij de andere $F_2(x)$ daarentegen hier tot de uitkomsten

$$\int_0^{\infty} \frac{Cos.\,k\,x.\,Cot.\,x}{1-2\,p\,Cos.\,x+p^2} f\,x\,d\,x = 0 \quad , \quad a < \pi, (\text{Lim. } k = \infty) \; \ldots \ldots \ldots \ldots \; (42)$$

$$\left. \begin{array}{l} = 0\,, \\ = \infty. \end{array} \right\} \begin{array}{l} , \pi < a < \infty \text{, naarmate } f(b\,\pi) \text{ steeds nul is of niet.} \\ , (\text{Lim. } k = \infty) \; \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \; (43) \end{array}$$

Nog kunnen de hulpformulen (XXII) tot (XXIV) en (XXIX), (XXX) hier worden toegepast. Het eerste stel leidt voor $F_2(x)$ tot de integraal (5); het tweede voor de onderstelling $F_1(x)$ tot de integraal (4); wanneer men daarentegen in de eerste formulen $F_1(x)$ en in de laatste $F_2(x)$ invoert, zoo is

$$\int_0^a \frac{Sin.kx.Sin.x.Tang.x}{1-2p\,Cos.x+p^2} f(x)\,dx = 0 \quad , \quad a < \tfrac{1}{2}\pi \,, \ (\text{Lim.}\,k=\infty) \ldots\ldots (44)$$

$$\left.\begin{matrix} =0\,, \\ =\infty. \end{matrix}\right\} , \tfrac{1}{2}\pi < a < \infty, \text{naarmate } f\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right) \text{ altijd of niet altijd nul is. } (\text{Lim.}\,k=\infty) \ldots\ldots (45)$$

$$\int_0^a \frac{Cos.kx.\,Cos.x.\,Cot.x}{1-2p\,Cos.x+p^2} f(x)\,dx = 0 \quad , \quad a < \pi, \ (\text{Lim.}\,k=\infty) \ldots\ldots (46)$$

$$\left.\begin{matrix} =0\,, \\ =\infty. \end{matrix}\right\} , \pi < a < \infty \,, \text{ naarmate } f(b\pi) \text{ altijd of niet altijd nul is. } (\text{Lim.}\,k=\infty) \ldots\ldots (47)$$

Daar

$$Sin.x.\,Tang.x = \frac{Sin.^2 x}{Cos.x} = \frac{1-Cos.^2 x}{Cos.x} = \frac{1}{Cos.x} - Cos.x\,,$$

en $$Cos.x.\,Cot.x = \frac{Cos.^2 x}{Sin.x} = \frac{1-Sin.^2 x}{Sin.x} = \frac{1}{Sin.x} - Sin.x$$

is, zoo volgt uit de verbinding van de integralen (6) met (44) en (45), en van (3) met (46) en (47):

$$\int_0^a \frac{Sin.kx.\,Sec.x}{1-2p\,Cos.x+p^2} f(x)\,dx = 0 \quad , \quad a < \tfrac{1}{2}\pi, \ (\text{Lim.}\,k=\infty) \ldots\ldots (48)$$

$$\left.\begin{matrix} =0\,, \\ =\infty. \end{matrix}\right\} , \tfrac{1}{2}\pi < a < \infty, \text{ naarmate } f\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right) \text{ altijd of niet altijd nul is. } (\text{Lim.}\,k=\infty) \ldots\ldots (49)$$

$$\int_0^a \frac{Cos.kx.\,Cosec.x}{1-2p\,Cos.x+p^2} f(x)\,dx = 0 \quad , \quad a < \pi, \ (\text{Lim.}\,k=\infty) \ldots\ldots (50)$$

$$\left.\begin{matrix} =0\,, \\ =\infty. \end{matrix}\right\} , \pi < a < \infty \,, \text{naarmate } f(b\pi) \text{ altijd of niet altijd nul is. } (\text{Lim.}\,k=\infty) \ldots\ldots (51)$$

Bij al deze formulen is even als vroeger steeds $f(x)$ stadig ondersteld tusschen de grenzen der integratie, uitgezonderd bij die, waar het tegendeel uitdrukkelijk wordt opgegeven; ook is p gebonden door de ongelijkheden $-\infty < p < +1, +1 < p < \infty$, dat is p ongelijk aan $+1$.

Men heeft hier tevens eene wederzijdsche bevestiging van sommige der gevondene theoremata, in de omstandigheid dat de formulen (IX), (X), (XI), (XIV), (XVII), (XVIII), (XIX), (XXVI), (XXVII), (XXVIII), hoezeer zij ook mogen verschillen, bij geschikte onderstellingen allen tot dezelfde integraal (7) voeren; evenzoo de formules (IX), (X), (XX), (XXI), (XXV), (XXXI) tot de integraal (8), de formulen (X), (XXII) tot (XXIV) tot de integraal (5) en de formulen (IX), (XXIX), (XXX) tot de integraal (4).

Van de hier bepaalde integralen komen, als $f(x)=1$ wordt genomen, N°. 8 en 55 voor op Table 84 N°. 11 en 12 mijner *Tables d'Intégrales Définies* *.

---

* Wilde men bijv. de integraal $I=\int_0^\pi \frac{Sec.x\,dx}{1-2p\,Cos.x+p^2}$ nagaan, (zie *Tables d'Intégrales Déf.* T. 85. N°. 4, 5, zoo kan men daartoe de bekende ontwikkeling van $Sec.x$ in eenen reeks gebruiken:

$$Sec.x=-2\sum_1^{k-1}(-1)^n\,Cos.\{(2n-1)x\}-\frac{Cos.2kx}{Cos.x}(-1)^k.$$

Dan wordt

$$I=-2\sum_1^{k-1}(-1)^n\int_0^\pi\frac{Cos.(2n-1)x\,dx}{1-2p\,Cos.x+p^2}-(-1)^k\int_0^\pi\frac{Cos.2kx}{1-2p\,Cos.x+p^2}\frac{dx}{Cos.x}$$

Ten einde dit uit te werken late men k oneindig worden. Alsdan is naar *Tables d'Int. Déf.* T. 84. 3 de eerste term van het eerste lid

$$=-2\sum_1^{k-1}(-1)^n\frac{\pi}{1-p^2}p^{2n-1}=\frac{-2\pi}{1-p^2}\sum_1^{k-1}(-1)^n p^{2n-1}=\frac{-2\pi}{1-p^2}\frac{-p}{1+p^2}=\frac{2p\pi}{1-p^4}.$$

Voor den tweeden term wende men zich tot de hiervoor gevonden formulen en wel tot 30—33. Stellende aldaar $f(x)=Cosec.x=\frac{1}{Cos.x.\,Tang.x}$ wordt, daar $a=\pi$ hier grooter dan $\frac{1}{2}\pi$ is, voor alle evene k

$$\int_0^\pi\frac{Cos.2kx}{1-2p\,Cos.x+p^2}\frac{dx}{Cos.x}=(-1)^k\,\infty,\ \text{daar}\ f\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right)=Cosec.\left(\frac{2b+1}{2}\pi\right)=\pm 1,$$

niet nul is. Dientengevolge is de waarde van onze integraal oneindig groot, en niet $\frac{2p\pi}{1-p^2}$, zoo als SCHLÖMILCH vindt.

Evenzeer geven ons de gevondene theoremata o. a. dat b. v. de bekende integralen, *Tables etc.*, T. 205. N°. 13, 16, T. 17. N°. 10, 1:

$$\int_0^\infty\frac{Tang.px\,dx}{q^2+x^2},\quad\int_0^\infty\frac{Cot.px\,dx}{q^2+x^2},\quad\int_0^\infty\frac{Sec.px\,dx}{q^2+x^2},\quad\int_0^\infty\frac{x\,Cosec.px\,dx}{q^2+x^2}$$

alle oneindig moeten zijn.

En hiermede mogen wij de theorie van de bepaalde integralen

$$\int_a^b Sin.kx.f(x)\,dx \quad \text{en} \quad \int_a^b Cos.kx.f(x)\,dx\ , \quad (\text{Lim.}\,k=\infty)\ ,$$

als afgehandeld beschouwen, daar men in ieder bijzonder geval zich tot de gevondene theoremata kan wenden, en daaruit de overeenkomstige uitkomst afleiden. Voor het beweren, dat men dikwerf op den bijzonderen vorm van k te letten heeft, hebben de bewijzen niet ontbroken: dáár, waar zulks te pas kwam, is gewezen op het verschil, dat er in dit opzigt dikwijls bestaat tusschen integralen, die oogenschijnlijk tot uitkomsten van denzelfden aard moesten aanleiding geven, maar waarbij dan eens k geheel algemeen bleef, dan weder in twee of vier afzonderlijke vormen werd gesplitst; ja, men heeft gezien, dat ook bij de grenzen der integratie dikwerf bijzondere vormen moesten onderscheiden worden. Wij moeten nu nagaan, welken invloed de bijzondere vormen van het oneindige uitoefenen, wanneer zij als grenzen der integratie zich voordoen.

II. Over de Integraal $\int_0^\infty \varphi\,(Sin.\alpha x, Cos.\beta x)\,dx$.

12. Over deze soort van bepaalde integralen zijn zeer verschillende meeningen geopperd, en deze hebben tot zeer verschillende uitkomsten geleid; vele dier meeningen berusten echter op verkeerde gronden en valsche voorstellingen van het wezen eener bepaalde integraal. Zoo werd bijv. in eene bepaalde integraal

$$\int_0^\infty f(ax)\,\mathrm{F}(b,x)\,dx = \psi(a,b), \ldots\ldots\ldots\ldots (x)$$

waar de functie van dien aard was, dat $f(0)=1$ werd, $a=0$ gesteld, en daaruit afgeleid

$$\int_0^\infty \mathrm{F}(b,x)\,dx = \psi(o,b); \ldots\ldots\ldots\ldots (y)$$

terwijl men daarbij vergat, dat de vergelijking (x) bepaaldelijk was ontwikkeld onder de voorwaarde, dat a grooter dan 0 moest blijven. De afleiding van de integraal (y) uit (x) op die wijze was dus ongeoorloofd, al konde het

soms gebeuren, dat zij tot eene ware uitkomst voerde ten gevolge van bijzondere eigenschappen der integraal (x); maar het waren juist deze, somtijds met anders verkregene overeenstemmende, uitdrukkingen, die tot het aanwenden der bovengemelde, niet steek houdende, methode verleid hebben.

Later heeft RAABE gedeeltelijk in navolging van POISSON * in het *Journal für reine und angewandte Mathematik von Crelle,* Bd. 15. S. 355, *über die Summation periodischer Reihen* † zich meer bepaaldelijk met deze soort van integralen bezig gehouden, maar is daarbij van niet geldige gronden uitgegaan. Hij beschouwde eene reeks

$$\begin{aligned} y = a_1 &+ a_2 x + a_3 x^2 + \ldots + a_p x^{p-1} \\ &+ a_1 x^p + a_2 x^{p+1} + a_3 x^{p+2} + \ldots + a_p x^{2p-1} \\ &+ a_1 x^{2p} + a_2 x^{2p+1} + \ldots , \end{aligned}$$

die uit perioden bestaat, elke van p termen, waarbij zich dezelfde coëfficienten $a_1, a_2 \ldots a_p$ telkens in dezelfde orde herhalen, zoodat

$$y = (1 + x^p + x^{2p} + \ldots)(a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots + a_p x^{p-1})$$

is. Wordt $x = 1$, zoo stelt hij

$$1 + x^p + x^{2p} + \ldots = \frac{1}{1 - x^p}; \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (z)$$

zoodat

$$y = \frac{a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots + a_p x^{p-1}}{1 - x^p}$$

wordt: bij de onderstelling

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_p = 0,$$

waardoor de teller der vorige breuk door $1 - x$ deelbaar wordt, verkrijgt hij voor $x = 1$:

$$y = \frac{(p-1)a_1 + (p-2)a_2 + (p-3)a_3 + \ldots + 3a_{p-3} + 2a_{p-2} + a_{p-1}}{p}.$$

Deze uitkomst echter geldt niet, daar (z) slechts voor x kleiner dan de eenheid geldig is en niet meer voor x gelijk één, en het daarop gebouwde resultaat:

---

* Zie diens beschouwingen over de *Sommation des Séries de Quantités périodiques,* voorkomende in het *Journal de l'Ecole Polytechnique,* Cahier 19, p. 404. N°. 45—56.

† Zie nog zijne verhandeling *über die Summation der ohne Ende fortlaufenden harmonisch-periodischen Reihen,* in het *Journal von Crelle,* Bd. 23. S. 105 en Bd. 25. S. 160.

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty \varphi\,(Sin.\,\alpha\,x, Cos.\,\beta\,x)\,d\,x = -\frac{k}{2\,\pi}\int_0^{2\pi} \varphi\,(Sin.\,\alpha\,k\,x, Cos.\,\beta\,k\,x)\,x\,d\,x, \\ \text{als}\quad &\int_0^{2\pi} \varphi\,(Sin.\,\alpha\,k\,x, Cos.\,\beta\,k\,x)\,d\,x = 0 \text{ is,} \end{aligned}\right\} \ldots (aa)$$

vervalt daarmede reeds, behalve wegens hetgeen nog op de verdere redenering aan te merken is. In den grond der zaak verschilt dan ook eigenlijk deze methode weinig van de straks afgekeurde.

Op de volgende wijze ontgaat men daarentegen het gebruik van divergente reeksen, en derhalve het onware, althans onzekere, van de daarop gebouwde redeneringen; men komt echter daarbij niet tot zulke algemeene uitkomsten, wat de grens oneindig betreft; of liever, men ziet, welke beteekenis men in het vorige aan die grens te hechten had.

15. Het is bekend, dat de definitie van eene bepaalde integraal door de formule

$$\int_\varepsilon^q f(x)\,d\,x = \text{Lim.}\,\delta\,\{f(\varepsilon)+f(\varepsilon+\delta)+f(\varepsilon+2\,\delta)+\ldots+f(q-\delta)\},(q=n\,\delta),(\text{Lim.}\,\delta=0)\,.\,(\text{A})$$

wordt uitgedrukt. Neemt men hierin δ voor de onderste grens ε, zoo is

$$\int_\delta^q f(x)\,d\,x = \text{Lim.}\,\delta\,\{f(\delta)+f(2\,\delta)+f(3\,\delta)+\ldots+f[(n-1)\,\delta]\}\,\ldots\ldots\ldots\ldots\,(\text{A}_1)$$

Wanneer men nu hierin $f\,x = r^{\frac{x}{\delta}}\,\varphi\,(Sin.\,\alpha\,x,\,Cos.\,\beta\,x)$ aanneemt, — het zal later blijken, waarom hier de exponentiele factor bij de goniometrische functie is gevoegd, — zoo wordt dit:

$$\int_\delta^q r^{\frac{x}{\delta}}\,\varphi\,(Sin.\,\alpha\,x, Cos.\,\beta\,x)\,d\,x = \text{Lim.}\,\delta\,\Big[r\,\varphi\,(Sin.\,\alpha\,\delta, Cos.\,\beta\,\delta) + r^2\,\varphi\,(Sin.\,2\,\alpha\,\delta, Cos.\,2\,\beta\,\delta)\,+$$

$$+\,r^3\,\varphi\,(Sin.\,3\,\alpha\,\delta, Cos.\,3\,\beta\,\delta)+\ldots+r^{n-1}\,\varphi\,(Sin\,\{(n-1)\,\alpha\,\delta\},\,Cos.\,\{(n-1)\,\beta\,\delta)\Big].$$

Nu kan men de bovenste grens $q = n\,\delta$ nader gaan bepalen; daartoe zij $n = 2\,a\,\pi\,b + 1$, dus $q = 2\,a\,\pi\,b\,\delta + \delta$; daar $n\,\delta$ een eindig getal was ondersteld, moest n oneindig zijn, en men kan aannemen, dat dit bij de nadere bepaling van n door den factor b ontstaat, die dan oneindig is, terwijl de factor $2\,a\,\pi$ eindig blijft. Neemt men dus $b\,\delta$ wederom $= c$, dan kan deze eene eindige grootheid wezen (even als vroeger q), hoezeer het oneindig zijn van c in het algemeen niet uitgesloten wordt. Men heeft derhalve

$$q = 2a\pi c + \delta\,, \quad n = 2ab\pi + 1, \qquad b\delta = c;$$

en de integraal wordt dus:

$$\int_{\delta}^{2a\pi c+\delta} r^{\frac{x}{\delta}} \varphi(Sin.\,\alpha x, Cos.\,\beta x)\, dx = \text{Lim.}\, \delta r \Big[\varphi(Sin.\,\alpha\delta, Cos.\,\beta\delta) + r\varphi(Sin.\,2\alpha\delta, Cos.\,2\beta\delta) + \\ + r^2 \varphi(Sin.\,3\alpha\delta, Cos.\,3\beta\delta) + \ldots + r^{2ab\pi-1}\varphi(Sin.\,2ab\pi\alpha\delta, Cos.\,2ab\pi\beta\delta)\Big].$$

Hierin is a nog geheel willekeurig: men neme deze grootheid zoodanig aan dat $a\alpha$ en $a\beta$ beide geheele getallen worden; en dit is altijd mogelijk, zoo lang α en β slechts rationele grootheden zijn, want dan behoeft men voor a b. v. slechts het kleinste gemeene veelvoud van de noemers te nemen, die in de waarden van α en β voorkomen; het is echter duidelijk, dat a even goed elk veelvoud van dit gemeene veelvoud kan zijn. Bij deze onderstelling wordt, wanneer e eenig gedeelte van b voorstelt, zoodanig dat $e\delta$ 1, 2, 3 tot c wordt:

$$Sin.\,\{(2\pi ea + f)\alpha\delta\} = Sin.\,(2\pi . a\alpha . e\delta + f\alpha\delta) = Sin.\,f\alpha\delta\,,$$
$$Cos.\,\{(2\pi ea + f)\beta . \delta\} = Cos.\,(2\pi . a\beta . e\delta + f\beta\delta) = Cos.\,f\beta\delta\,;$$

en derhalve ook:

$$\varphi\big[Sin.\,\{(2\pi ea + f)\alpha\delta\}, Cos.\,\{(2\pi ea + f)\beta\delta\}\big] = \varphi(Sin.\,f\alpha\delta, Cos.\,f\beta\delta).$$

Hierdoor verkrijgt de integraal den volgenden vorm:

$$\int_{\delta}^{2a\pi c+\delta} r^{\frac{x}{\delta}} \varphi(Sin.\,\alpha x, Cos.\,\beta x)\, dx = \text{Lim.}\, \delta r.$$

$$\big[\varphi(Sin.\,\alpha\delta, Cos.\,\beta\delta) + r\varphi(Sin.\,2\alpha\delta, Cos.\,2\beta\delta) + \ldots + r^{2a\pi-1}\varphi(Sin.\,2a\pi\alpha\delta, Cos.\,2a\pi\beta\delta)$$
$$+ r^{2a\pi}\varphi(Sin.\,\alpha\delta, Cos.\,\beta\delta) + r^{2a\pi+1}\varphi(Sin.\,2\alpha\delta, Cos.\,2\beta\delta) + \ldots + r^{4a\pi-1}\varphi(Sin.\,2a\pi\alpha\delta, Cos.\,2a\pi\beta\delta)$$
$$+ r^{4a\pi}\varphi(Sin.\,\alpha\delta, Cos.\,\beta\delta) + r^{4a\pi+1}\varphi(Sin.\,2\alpha\delta, Cos.\,2\beta\delta) + \ldots + r^{6a\pi-1}\varphi(Sin.\,2a\pi\alpha\delta, Cos.\,2a\pi\beta\delta)$$
$$+ \;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$
$$+ r^{(c-1)2a\pi}\varphi(Sin.\,\alpha\delta, Cos.\,\beta\delta) + r^{(c-1)2a\pi+1}\varphi(Sin.\,2\alpha\delta, Cos.\,2\beta\delta) + \ldots + r^{2ca\pi-1}\varphi(Sin.\,2a\pi\alpha\delta, Cos.\,2a\pi\beta\delta)\big]$$
$$= \text{Lim.}\, \delta r\,(1 + r^{2a\pi} + r^{4a\pi} + \ldots + r^{(c-1)2a\pi}).$$
$$\big[\varphi(Sin.\,\alpha\delta, Cos.\,\beta\delta) + r\varphi(Sin.\,2\alpha\delta, Cos.\,2\beta\delta) + \ldots + r^{2a\pi-1}\varphi(Sin.\,2a\pi\alpha\delta, Cos.\,2a\pi\beta\delta)\big]. \text{(B)}$$
$$= \text{Lim.}\, \delta r \frac{1 - r^{2ca\pi}}{1 - r^{2a\pi}} \times$$
$$\big[\varphi(Sin.\,a\delta, Cos.\,\beta\delta) + r\varphi(Sin.\,2\alpha\delta, Cos.\,2\beta\delta) + \ldots + r^{2a\pi-1}\varphi(Sin.\,2a\pi\alpha\delta, Cos.\,2a\pi\beta\delta)\big]. \text{(C)}$$

Om hier van de vergelijking (B) tot de volgende (C) te kunnen besluiten, heeft men evenwel nog enkele voorwaarden noodig, die men niet over

6

het hoofd mag zien, zoo als onder anderen door RAABE in het straks aangehaalde stuk is gedaan. Hier toch wordt eene reeks in eene geslotene uitdrukking getransformeerd, en het komt er dus op aan, om te weten of de reeks oneindig, en in dat geval, of zij convergent zij: immers, als de reeks oneindig en divergent tevens is, zoo wordt gezegde transformatie volstrekt onwettig; is de reeks daarentegen eindig, zoo mag men altijd daartoe overgaan. In het onderhavige geval heeft men dus daarop te letten, of r kleiner dan de eenheid zij; want alsdan is de reeks altijd convergent, en de gevolgtrekking is dus geoorloofd. Maar is r gelijk of grooter dan één, zoo geldt dit besluit niet langer, tenzij de reeks eindig zij, dat is c eene eindige waarde hebbe; want was daarbij c oneindig, en dus de reeks eene oneindige, zoo was zij divergent, althans niet meer convergerende. Het geval van $r = 1$ en c eindig willen wij dus het eerst beschouwen.

Ten eerste is alsdan onder het integraalteeken de factor $r^{\frac{x}{\delta}}$ na te gaan: deze wordt $1^{\frac{x}{\delta}}$ dus 1. Vervolgens heeft men in het tweede lid den factor $\frac{1 - r^{2ca\pi}}{1 - r^{2a\pi}}$ en deze wordt $\frac{0}{0}$ voor $r = 1$; men moet dus teller en noemer ten opzigte van r differentiëren, en daarna wederom $r = 1$ stellen: deze bewerking geeft hier:

$$\frac{1 - r^{2ca\pi}}{1 - r^{2a\pi}} = \frac{-2ca\pi r^{2ca\pi - 1}}{-2a\pi r^{2a\pi - 1}} = c r^{(c-1)2a\pi} = c.$$

Men heeft derhalve, — daar de grenzen voor de limiet nul van δ worden: 0 en $2a\pi c$, en r gelijk één is ondersteld —:

$$\int_0^{2a\pi c} \varphi\,(Sin.\,\alpha\, x, Cos.\,\beta\, x)\, d\,x = \text{Lim.}\,\delta.\,c\Big[\varphi\,(Sin.\,\alpha\,\delta, Cos.\,\beta\,\delta) + \varphi\,(Sin.\,2\,\alpha\,\delta, Cos.\,2\,\beta\,\delta) + \ldots$$
$$+ \varphi\,(Sin.\,2\,a\,\pi\,\alpha\,\delta, Cos.\,2\,a\,\pi\,\beta\,\delta)\Big]$$
$$= c\,\text{Lim.}\,\delta\Big[\varphi(Sin.\,\alpha\,\delta, Cos.\,\beta\,\delta) + \varphi(Sin.\,2\,\alpha\,\delta, Cos.\,2\,\beta\,\delta) + \ldots + \varphi(Sin.\,2\,a\pi\,\alpha\,\delta, Cos.\,2\,a\pi\,\beta\,\delta)\Big];$$

of wanneer men het tweede lid dezer vergelijking volgens de grondformule (A_1) tot eene bepaalde integraal herleidt, waarbij dan even goed de grenzen 0 en $2a\pi$ kunnen worden gesteld in plaats van δ en $2a\pi + \delta$ — en dit is werkelijk geoorloofd, wanneer ten minste $\varphi\,(Sin.\,\alpha\, x,\ Cos.\,\beta\, x)$ voor de grens nul niet oneindig wordt, welke voorwaarde reeds in de integraal van het eerste lid ligt opgesloten — ook de vergelijking:

$$\int_0^{2a\pi c} \varphi\,(Sin.\,\alpha\, x, Cos.\,\beta\, x)\, d\, x = c \int_0^{2a\pi} \varphi\,(Sin.\,\alpha\, x, Cos.\,\beta\, x)\, d\, x, \text{ (c eindig) } \ldots\ldots \text{ (XXXVI)}$$

Men kan ook in dezelfde vergelijking (C), altijd bij de onderstelling dat c eindig blijft, $1 - f\delta$ als waarde voor r aannemen; alsdan verkrijgt de factor $r^{\frac{x}{\delta}}$ onder het integraalteeken eene andere waarde voor Lim. $\delta = 0$ namelijk

$$\text{Lim.}\, r^{\frac{x}{\delta}} = \text{Lim.}\,(1 - f\delta)^{\frac{x}{\delta}} = \text{Lim.}\left[(1 - f\delta)^{\frac{1}{f\delta}}\right]^{fx} = \left[\text{Lim.}\,(1 - f\delta)^{\frac{1}{f\delta}}\right]^{fx} = (e^{-1})^{fx} = e^{-fx},$$

zoo als uit de theorie der limieten genoegzaam bekend is.

Tevens wordt alsdan:

$$\frac{1 - r^{2ca\pi}}{1 - r^{2a\pi}} = \frac{1 - (1 - f\delta)^{2ca\pi}}{1 - (1 - f\delta)^{2a\pi}} = \frac{1 - \left\{1 - \frac{2\,c\,a\,\pi}{1} f\delta + \frac{2\,c\,a\,\pi}{1}\cdot\frac{2\,c\,a\,\pi - 1}{2} f\delta^2 - \ldots\right\}}{1 - \left\{1 - \frac{2\,a\,\pi}{1} f\delta + \frac{2\,a\,\pi}{1}\cdot\frac{2\,a\,\pi - 1}{2} f\delta^2 - \ldots\right\}} =$$

$$= \frac{\frac{2\,c\,a\,\pi}{1} - \frac{2\,c\,a\,\pi}{1}\cdot\frac{2\,c\,a\,\pi - 1}{2} f\delta + \ldots}{\frac{2\,a\,\pi}{1} - \frac{2\,a\,\pi}{1}\cdot\frac{2\,c\,a\,\pi - 1}{2} f\delta + \ldots} = \frac{2\,c\,a\,\pi}{2\,a\,\pi} = c;$$

zoodat hier dezelfde uitkomst verschijnt, als straks door het differentiëren van teller en noemer. Hierdoor wordt de vergelijking (C):

$$\int_0^{2a\pi c} e^{-fx}\varphi(Sin.\alpha x, Cos.\beta x)dx = \text{Lim.}\,\delta c\Big[(1-f\delta)\varphi(Sin.\alpha\delta, Cos.\beta\delta) + (1-f\delta)^2\varphi(Sin.2\alpha\delta, Cos.2\beta\delta) + \ldots$$
$$+ (1 - f\delta)^{2a\pi}\varphi\,(Sin.\,2\,a\,\pi\,\alpha\,\delta,\, Cos.\,2\,a\,\pi\,\beta\,\delta)\Big]$$

of, als men de derde of hoogere magten van δ verwaarloost:

$$\int_0^{2a\pi c} e^{-fx}\varphi\,(Sin.\,\alpha x, Cos.\,\beta\, x)\, d\, x = c\,\Big\{\text{Lim.}\,\delta\Big[\varphi\,(Sin.\,\alpha\,\delta, Cos.\,\beta\,\delta) + \varphi\,(Sin.\,2\,\alpha\,\delta, Cos.\,2\,\beta\,\delta) + \ldots$$
$$+ \varphi\,(Sin.\,2\,a\,\pi\,\alpha\,\delta, Cos.\,2\,a\,\pi\,\beta\,\delta)\Big]$$
$$- f\,\text{Lim.}\,\delta\Big[\delta\varphi(Sin.\alpha\delta, Cos.\beta\delta) + 2\delta\varphi(Sin.2\alpha\delta, Cos.2\beta\delta) + \ldots + 2a\pi\delta\varphi(Sin.2a\pi\alpha\delta, Cos.2a\pi\beta\delta)\Big]\Big\}.$$

Voert men hier wederom naar de grondvergelijking (A_1) bepaalde integralen in, zoo blijkt, dat de beide termen van het laatste lid dezer vergelijking, die elk door de limiet van eene reeks worden gevormd, kunnen worden voorgesteld door de bepaalde integralen

$$\int_0^{2a\pi} \varphi\,(Sin.\,\alpha\, x, Cos.\,\beta\, x)\, dx \quad \text{en} \quad \int_0^{2a\pi} \varphi\,(Sin.\,\alpha\, x, Cos.\,\beta\, x)\, x\, d\, x;$$

zoodat de vorige vergelijking wordt:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^{2a\pi c} e^{-fx}\varphi(Sin.\alpha x, Cos.\beta x)dx &= c\int_0^{2a\pi}\varphi(Sin.\alpha x, Cos.\beta x)dx - cf\int_0^{2a\pi}\varphi(Sin.\alpha x, Cos.\beta x)x dx \\ &= c\int_0^{2a\pi}\varphi(Sin.\alpha x, Cos.\beta x)(1-fx)\,dx, (c \text{ niet } \infty).\end{aligned}\right\}. \text{(XXXVII)}$$

Bij de theoremata XXXVI en XXXVII moeten $a\alpha$ en $a\beta$ steeds geheele getallen zijn.

14. Wanneer c ook oneindig zijn kan, mag men de vergelijking (C) niet meer gebruiken, maar moet men zich dadelijk tot de vergelijking (B) wenden. Het tweede lid daarvan bevat onder anderen twee factoren, die beide reeksen zijn: de eerste daarvan

$$y = 1 + r^{2a\pi} + r^{4a\pi} + \ldots + r^{(c-1)2a\pi} \ldots\ldots\ldots\ldots (ab)$$

wordt met c oneindig, en derhalve ook divergent, zoodra r gelijk of grooter dan één is. Opdat dus de waarde der integraal niet oneindig worde, dat is, opdat de integraal zelve bestaan kunne, is het vooreerst noodzakelijk, dat de tweede reeks

$$z = \delta\left[\varphi(Sin.\alpha\delta, Cos.\beta\delta) + r\varphi(Sin.2\alpha\delta, Cos.2\beta\delta) + r^2\varphi(Sin.3\alpha\delta, Cos.3\beta\delta) + \ldots \right.$$
$$\left. + r^{2a\pi-1}\varphi(Sin.2a\pi\alpha\delta, Cos.2a\pi\beta\delta)\right] \ldots (ac)$$

nul worde. Aan deze voorwaarde wordt voldaan door de volgende onderstelling:

$$\text{Lim.}\,\delta\left[\varphi(Sin.\alpha\delta, Cos.\beta\delta) + \varphi(Sin.2\alpha\delta, Cos.2\beta\delta) + \ldots + \varphi(Sin.2a\pi\alpha\delta, Cos.2a\pi\beta\delta)\right] = 0;.\ \text{(D)}$$

dat is, wanneer men deze reeks volgens de grondformule (A_1) in eene bepaalde integraal overbrengt:

$$\int_0^{2a\pi}\varphi(Sin.\alpha x, Cos.\beta x)\,dx = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(E)}$$

Dat deze onderstelling wezenlijk de gewenschte uitwerking heeft, althans voor het geval dat r juist één is, of de eenheid tot limiet heeft, hetgeen hier slechts te pas komt, blijkt op de volgende wijze. Wanneer men toch de formule (D) van (ac) aftrekt, zoo komt er:

$$z = -\delta\Big[(1-r)\varphi(Sin.2\alpha\delta, Cos.2\beta\delta) + (1-r^2)\varphi(Sin.3\alpha\delta, Cos.3\beta\delta) + \ldots$$
$$+ (1-r^{2a\pi-1})\varphi(Sin.2a\pi\alpha\delta, Cos.2a\pi\beta\delta)\Big]$$
$$= -(1-r)\delta\Big[\varphi(Sin.2\alpha\delta, Cos.2\beta\delta) + \frac{1-r^2}{1-r}\varphi(Sin.3\alpha\delta, Cos.3\beta\delta) + \ldots$$
$$+ \frac{1-r^{2a\pi-1}}{1-r}\varphi(Sin.2a\pi\alpha\delta, Cos.2a\pi\beta\delta)\Big].$$

Ten einde de waarde van z onder meer symmetrischen vorm te brengen, telle men daarbij den getallenvorm (D), waarvan de waarde nul is; dan wordt

$$Z = -(1-r)\delta\Big[\varphi(Sin.\alpha\delta, Cos.\beta\delta) + 2\varphi(Sin.2\alpha\delta, Cos.2\beta\delta) + \left(1 + \frac{1-r^2}{1-r}\right)\varphi(Sin.3\alpha\delta, Cos.3\beta\delta) +$$
$$+ \left(1 + \frac{1-r^{2a\pi-1}}{1-r}\right)\varphi(Sin.2a\pi\alpha\delta, Cos.2a\pi\beta\delta)\Big] \ldots\ldots\ldots (ad)$$

Substitueert men deze waarde in de vergelijking (B) en bedenkt men, dat het produkt van den factor $(1-r)$ uit de waarde van z met de reeks y vermenigvuldigd, nu ook voor $r=1$ convergent moet zijn, en dat men dus *nu* ook hier stellen mag, dat

$$(1-r^{2a\pi})(1 + r^{2a\pi} + r^{4a\pi} + \ldots + r^{(c-1)2a\pi}) = 1 - r^{2ca\pi}$$

is, zoo heeft men eindelijk voor de formule (B):

$$\int_{\delta}^{2\pi ac+\delta} r^{\frac{x}{\delta}}\varphi(Sin.\alpha x, Cos.\beta x)\,dx = -\text{Lim.}\,\delta r\frac{1-r}{1-r^{2a\pi}}(1-r^{2ca\pi})$$
$$\Big[\varphi(Sin.\alpha\delta, Cos.\beta\delta) + 2\varphi(Sin.2\alpha\delta, Cos.2\beta\delta) + \left(1 + \frac{1-r^2}{1-r}\right)\varphi(Sin.3\alpha\delta, Cos.3\beta\delta) + \ldots$$
$$+ \left(1 + \frac{1-r^{2a\pi-1}}{1-r}\right)\varphi(Sin.2a\pi\alpha\beta, Cos.2a\pi\beta\delta)\Big], \ldots\ldots\ldots (ae)$$

en deze vergelijking geldt nu in het algemeen, hetzij c oneindig zij of niet, hetzij r één zij of niet, wanneer slechts de onderstelling (D) of (E) als waarheid kan worden aangenomen.

Wordt hierin vooreerst $r=1$, zoo is $\frac{1-r}{1-r^{2a\pi}} = \frac{0}{0}$, dus teller en noemer ten opzigte van r differentierende $\frac{-1}{-2a\pi r^{2a\pi-1}} = \frac{1}{2a\pi}$; $1-r^{2ac\pi}$ wordt $1-1=0$, zoo lang c eindig is althans; eindelijk is, even als vroeger Lim. $r^{\frac{x}{\delta}} = 1$. De

vergelijking wordt dus, wanneer men bij de grenzen ook Lim. $\delta = 0$ neemt:

$$\int_0^{2\pi ac} \varphi\,(Sin.\,\alpha\,x, Cos.\,\beta\,x)\,d\,x = -1.\frac{1}{2\,a\,\pi}.\,0\,.\,\text{Lim.}\,\delta\Big[\varphi\,(Sin.\,\alpha\,\delta, Cos.\,\beta\,\delta) + \ldots$$

$$+\left(1+\frac{1-r^{2a\pi-1}}{1-r}\right)\varphi\,(Sin.\,2\,a\,\pi\,\alpha\,\delta, Cos.\,2\,a\,\pi\,\beta\,\delta\Big]$$

$$= 0 \qquad (c \text{ eindig}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(XXXVIII)}$$

en dit komt, bij de onderstelling (E), die hier is aangenomen, geheel met het theorema (XXXVI) overeen.

Wordt daarentegen $r = 1 - \frac{\delta}{c}$, zoo is, zoo lang c eindig blijft,

$$\text{Lim.}\,r^{\frac{x}{\delta}} = \text{Lim.}\left(1-\frac{\delta}{c}\right)^{\frac{x}{\delta}} = \text{Lim.}\left[\left(1-\frac{\delta}{c}\right)^{\frac{1}{\delta}}\right]^{x} = \left[\text{Lim.}\left(1-\frac{\delta}{c}\right)^{\frac{c}{\delta}}\right]^{\frac{x}{c}} = (e^{-1})^{\frac{x}{c}} = e^{-\frac{1}{c}x}\,,\,.\ (af)$$

volgens eene bekende stelling uit de theorie der limieten. Vervolgens

$$\text{Lim.}\,\frac{1-r}{1-r^{2a\pi}} = \text{Lim.}\,\frac{1-\left(1-\frac{\delta}{c}\right)}{1-\left(1-\frac{\delta}{c}\right)^{2a\pi}} = \text{Lim.}\,\frac{\frac{\delta}{c}}{1-\left\{1-\frac{2a\pi}{1}\frac{\delta}{c}+\frac{2\,a\,\pi}{1}.\frac{2a\pi-1}{2}\frac{\delta^2}{c^2}-\ldots\right\}} =$$

$$= \text{Lim.}\,\frac{1}{\frac{2\,a\pi}{1}-\frac{2\,a\,\pi}{1}\,\frac{2\,a\,\pi-1}{2}\,\frac{\delta}{c}+\ldots} = \frac{1}{2\,a\,\pi},\ldots (ag)$$

en

$$\text{Lim.}\,\frac{1-r^{2ca\pi}}{\delta} = \text{Lim.}\,\frac{1-r^{2ba\pi\delta}}{\delta} = \frac{0}{0}, (\text{Lim}\,\delta = 0),$$

(wanneer men de waarde $c = b\,\delta$ substitueert) en dit wel voor elke eindige waarde van r. Men moet dus hier ten opzigte van δ den teller en den noemer differentiëren, en verkrijgt dan:

$$\text{Lim.}\,\frac{1-r^{2ba\pi\delta}}{\delta} = \text{Lim.}\,\frac{-r^{2ba\pi\delta}\,2\,b\,a\,\pi\,l\,r}{1} = \text{Lim.}(-2a\pi b l r.\,r^{2ba\pi\delta}) = \text{Lim.}(-2\,a\,\pi\,b\,l\,r.\,r^{2ca\pi}),$$

wanneer men in den laatsten factor $c = b\,\delta$ substitueert. Nu is:

$$\text{Lim.}\,b\,l\,r = \text{Lim.}\frac{c}{\delta}\,l\left(1-\frac{\delta}{c}\right) = \text{Lim.}\,c\,\frac{l\left(1-\frac{\delta}{c}\right)}{\delta} = \frac{0}{0};$$

dus wederom teller en noemer ten aanzien van δ differentierende:

$$\text{Lim.}\, b\, l\, r = \text{Lim.}\, c \frac{\left\{\dfrac{-\frac{1}{c}}{1-\frac{\delta}{c}}\right\}}{1} = \text{Lim.} \frac{-1}{\left\{1-\frac{\delta}{c}\right\}} = -1\,,$$

en

$$\text{Lim.}\, r^{2ca\pi} = \left(1-\frac{\delta}{c}\right)^{2ca\pi} = 1\,;$$

waaruit eindelijk volgt

$$\text{Lim.} \frac{1-r^{2ca\pi}}{\delta} = -2a\pi.(-1).(1) = +2a\pi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (ah)$$

Wanneer men nu deze uitkomsten (af), (ag) en (ah) in de vergelijking (ae) overbrengt, en daarbij bedenkt, dat voor $r = 1 - \frac{\delta}{c}$ naar de formule (ag)

$$1 + \frac{1-r^{s-1}}{1-r} = 1 + (s-1) = s$$

is, zoo heeft men ten laatste:

$$\int_0^{2\pi ac} e^{-\frac{1}{c}x} \varphi(Sin.\alpha x, Cos.\beta x) dx = -\text{Lim.}\,\delta.\frac{1}{2a\pi}.(2a\pi)\delta \Big[\varphi(Sin.\alpha\delta, Cos.\beta\delta) + 2\varphi(Sin.2\alpha\delta, Cos.2\beta\delta) +$$
$$+ 3\varphi(Sin.3\alpha\delta, Cos.3\beta\delta) + \ldots + 2a\pi\varphi(Sin.2a\pi\alpha\delta, Cos.2a\pi\beta\delta)\Big]$$
$$= -\text{Lim.}\,\delta\Big[\delta\varphi(Sin.\alpha\delta, Cos.\beta\delta) + 2\delta\varphi(Sin.2\alpha\delta, Cos.2\beta\delta) + 3\delta\varphi(Sin.3\alpha\delta, Cos.3\beta\delta) + \ldots$$
$$+ 2a\pi\delta\varphi(Sin.2a\pi\alpha\delta, Cos.2a\pi\beta\delta)\Big];$$

of, wanneer men de laatste reeks naar de algemeene grondformule tot eene bepaalde integraal herleidt:

$$\int_0^{2\pi ac} e^{-\frac{1}{c}x} \varphi(Sin.\alpha x, Cos.\beta x)\, dx = -\int_0^{2a\pi} \varphi(Sin.\alpha x, Cos.\beta x)\, x\, dx. \quad (c \text{ eindig}) \,.\, \text{(XXXIX)}$$

En dit komt wederom overeen met de formule (XXXVII), als men daar $f = \frac{1}{c}$ neemt, waardoor $cf = 1$ wordt, en men tevens bedenkt dat hier, volgens de voorwaardevergelijking (E) de eerste integraal in het tweede lid dier vergelijking (XXXVII) verdwijnt.

Wanneer eindelijk c oneindig wordt, zoo verandert de vorige redenering niet, dan ten opzigte van den factor $r^{\frac{x}{\delta}}$ onder het integraalteeken. Reeds da-

delijk konde men wel is waar in dat geval voor $e^{-\frac{1}{c}x}$ aannemen e^{-c} dat is 1, maar tot dezelfde uitkomst kan men ook op eene meer zekere wijze aldus geraken. In aanmerking nemende, dat men, zoo c oneindig is, ook daarvoor $\frac{1}{\delta}$ stellen kan, heeft men $r = 1 - \frac{\delta}{c} = 1 - \delta^2$, en vervolgens:

$$\text{Lim.}\, r^{\frac{x}{\delta}} = \text{Lim.}\,(1-\delta^2)^{\frac{x}{\delta}} = \text{Lim.}\,(1+\delta)^{\frac{x}{\delta}}(1-\delta)^{\frac{x}{\delta}} = \left[\text{Lim.}\,(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}\right]^x \left[\text{Lim.}\,(1-\delta)^{\frac{1}{\delta}}\right]^x$$
$$= \left[e^1\right]^x \left[e^{-1}\right]^x = e^x . e^{-x} = 1 .$$

In plaats van de vergelijking XXXIX komt hier dus, als men k voor c schrijft:

$$\int_0^{2\pi ak} \varphi\,(Sin.\,\alpha\, x, Cos.\,\beta\, x)\, d\, x = - \int_0^{2a\pi} \varphi\,(Sin.\,\alpha\, x, Cos.\,\beta\, x)\, x\, d\, x, \quad (k = \infty)\,. \; . \; . \; . \; . \; (\text{XL})$$

Bij de theoremata (XXXVIII), (XXXIX) en (XL) moet men niet vergeten, dat steeds de formules (D) of (E) als voorwaarde zijn aangenomen, en tevens even als vroeger $a\alpha$ en $a\beta$ geheele getallen moeten zijn.

15. Tot nog toe behandelden wij slechts de integralen die 0 en $2\pi a c$, eenig veelvoud van 2π, tot grenzen hadden; thans kunnen wij evenwel de beschouwing verder uitstrekken, en aan dezelfde integralen de grenzen 0 en $2\pi a c + b$ toekennen, waar dan b natuurlijk kleiner dan 2π moet zijn. In de theoremata XXXVI tot XL komen twee vormen van integralen voor, die dan hier worden:

$$\int_0^{2\pi ac+b} \varphi\,(Sin.\,\alpha\, x, Cos.\,\beta\, x)\, dx = \int_0^{2\pi ac} \varphi\,(Sin.\,\alpha\, x, Cos.\,\beta\, x)\, dx + \int_{2\pi ac}^{2\pi ac+b} \varphi\,(Sin.\,\alpha\, x, Cos.\,\beta\, x)\, d\, x,$$

$$\int_0^{2\pi ac+b} e^{-fx}\varphi(Sin.\alpha x, Cos.\beta x)dx = \int_0^{2\pi ac} e^{-fx}\varphi(Sin.\alpha x, Cos.\beta x)dx + \int_{2\pi ac}^{2\pi ac+b} e^{-fx}\varphi(Sin.\alpha x, Cos.\beta x)dx,$$

wanneer men den grensafstand 0 tot $2\pi a c + b$ in twee andere verdeelt, eenen van 0 tot $2\pi a c$ en den anderen van $2\pi a c$ tot $2\pi a c + b$. De beide eerste integralen in het tweede lid dezer vergelijkingen zijn nu dezelfde als in de genoemde theoremata worden bepaald; de beide laatsten laten zich gemakkelijk vereenvoudigen, en wel door $2\pi a c + y$ voor x te nemen. Daardoor wordt $d\,x = d\,y$, terwijl men 0 en b als grenzen voor y verkrijgt: verder is:

$$\begin{aligned}\varphi\,(Sin.\,\alpha\,x, Cos.\,\beta\,x) &= \varphi\,(Sin.\,\{\alpha\,(2\,\pi\,a\,c + y)\}\,, Cos.\,\{\beta\,(2\,\pi\,a\,c + y)\}) \\ &= \varphi\,(Sin.\,\{2\,\pi\,c\,a\,\alpha + \alpha\,y\}\,, Cos.\,\{2\,\pi\,c\,a\,\beta + \beta\,y\}) \\ &= \varphi\,(Sin.\,\alpha\,y, Cos.\,\beta\,y)\,,\end{aligned}$$

daar volgens de onderstelling $a\,\alpha$, en $a\,\beta$ beide geheele getallen moeten blijven. Verder is

$$e^{-fx} = e^{-f(2\pi ac+y)} = e^{-2\pi acf-fy} = e^{-2\pi acf}\,e^{-fy};$$

en dus worden de boven behandelde integralen:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^{2\pi ac+b} \varphi\,(Sin.\,\alpha\,x, Cos.\,\beta\,x)\,d\,x &= \int_0^{2\pi ac} \varphi\,(Sin.\,\alpha\,x, Cos.\,\beta\,x)\,d\,x + \int_0^b \varphi\,(Sin.\,\alpha\,x, Cos.\,\beta\,x)\,d\,x, \\ \int_0^{2\pi ac+b} e^{-fx}\varphi(Sin.\alpha x, Cos.\beta x)dx &= \int_0^{2\pi ac} e^{-fx}\varphi(Sin.\alpha x, Cos\,\beta x)dx + e^{-2\pi acf}\int_0^b e^{-fx}\varphi(Sin.\alpha x, Cos.\beta x)dx.\end{aligned}\right\}.(ai)$$

In deze transformatie-formulen (ai) voor de eerste integralen van het tweede lid de verschillende uitkomsten substituerende, die in de theoremata (XXXVI) tot (XL) verkregen zijn, komt er achtervolgens:

$$\int_0^{2a\pi c+b} \varphi(Sin.\alpha x, Cos.\beta x)dx = c\int_0^{2a\pi} \varphi(Sin.\alpha x, Cos.\beta x)dx + \int_0^b \varphi(Sin.\alpha x, Cos.\beta x)dx \;(c\text{ eindig}).(XLI)$$

$$\int_0^{2a\pi c+b} e^{-fx}\,\varphi\,(Sin.\,\alpha\,x, Cos.\,\beta\,x)\,d\,x = c\int_0^{2a\pi} \varphi\,(Sin.\,\alpha\,x, Cos.\,\beta\,x)\,d\,x - c\,f\int_0^{2a\pi} \varphi\,(Sin.\,\alpha\,x, Cos.\,\beta\,x)\,x\,d\,x$$

$$+ e^{-2\pi acf}\int_0^b e^{-fx}\,\varphi\,(Sin.\,\alpha\,x, Cos.\,\beta\,x)\,d\,x, \quad (c\text{ eindig}) \;.\;.\;(XLII)$$

$$\int_0^{2a\pi c+b} \varphi\,(Sin.\,\alpha\,x, Cos.\,\beta\,x)\,d\,x = \int_0^b \varphi\,(Sin.\,\alpha\,x, Cos.\,\beta\,x)\,d\,x \quad (c\text{ eindig}) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(XLIII)$$

$$\int_0^{2a\pi c+b} e^{-\frac{1}{c}x}\,\varphi\,(Sin.\,\alpha\,x, Cos.\,\beta\,x)\,d\,x = -\int_0^{2a\pi} \varphi\,(Sin.\,\alpha\,x, Cos.\,\beta\,x)\,x\,d\,x +$$

$$+ e^{-2a\pi}\int e^{-\frac{1}{c}x}\,\varphi\,(Sin.\,\alpha\,x, Cos.\,\beta\,x)\,d\,x \quad (c\text{ eindig}) \;.\;(XLIV)$$

$$\int_0^{2a\pi k+b} \varphi(Sin.\alpha x, Cos.\beta x)dx = -\int_0^{2a\pi} \varphi(Sin.\alpha x, Cos.\beta x)x\,dx + \int_0^b \varphi(Sin.\alpha x, Cos.\beta x)dx, (k=\infty).(XLV)$$

Bij deze vijf vergelijkingen is het volgende op te merken:

7

1°. $b < 2\pi$.

2°. $a\alpha$ en $a\beta$ geheele getallen.

3°. De drie laatste vergelijkingen bestaan slechts onder de voorwaarde

$$\int_0^{2a\pi} \varphi\,(Sin.\,\alpha x, Cos.\,\beta x)\,dx = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (E)$$

De onderlinge vergelijking der beide theoremata (XL) en (XLV) leert nu, dat de integraal

$$\int_0^{\infty} \varphi\,(Sin.\,\alpha x, Cos.\,\beta x)\,dx$$

verschillende waarden verkrijgt, naarmate ∞ van den vorm $2a\pi k$ of $2a\pi k + b$ is, voor $k = \infty$, en hiermede is hetgeen in N°. 1 is aangevoerd genoegzaam bewezen. Het behoeft naauwelijks te worden opgemerkt, dat de vergelijkingen (XXXVII) en (XLII) respective in (XXXVI) en (XLI) overgaan, zoodra f gelijk nul wordt gesteld.

16. Neemt men als toepassing

$$\varphi\,(Sin.\,\alpha x, Cos.\,\beta x) = Sin.\frac{px}{q} \text{ en } = Cos.\frac{px}{q},$$

zoo is respective

$$\alpha = \frac{p}{q}, \beta = 0 \text{ en } \alpha = 0, \beta = \frac{p}{q};$$

om derhalve de produkten $a\alpha$ en $a\beta$ tot geheele getallen te maken, behoeft men, als p en q geheele getallen voorstellen, slechts $a = q$ te nemen. In deze gevallen is zoowel bij de eene als bij de andere onderstelling:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^{2q\pi} Sin.\frac{px}{q}\,dx = q\int_0^{2\pi} Sin.py\,dy = -\frac{q}{p}\int_0^{2\pi}\frac{d.Cos.py}{dy}\,dy = -\frac{q}{p}\Big\{Cos.py\Big\}_0^{2\pi} = -\frac{q}{p}(1-1) = 0,\\
&\int_0^{2q\pi} Cos.\frac{px}{q}\,dx = q\int_0^{2\pi} Cos.py\,dy = \frac{q}{p}\int_0^{2\pi}\frac{d.\,Sin.py}{dy}\,dy = \frac{q}{p}\Big\{Sin.py\Big\}_0^{2\pi} = \frac{q}{p}(0-0) = 0;
\end{aligned}\right\}(ak)$$

— wanneer men eerst $x = qy$ stelt, en vervolgens verder herleidt. —

Aan de voorwaardenvergelijking (E) wordt dus hier voldaan, en dien ten gevolge geven de theoremata (XXXVIII) en (XL):

$$\int_0^{2\pi qc} Sin.\frac{px}{q}\,dx = 0\,, \ldots\ldots \quad (52)$$

$$\int_0^{2\pi qc} Cos.\frac{px}{q}\,dx = 0\,, \ldots\ldots \quad (53)$$

$$\int_0^{2\pi qk} Cos.\frac{px}{q}\,dx = -\int_0^{2q\pi} Cos.\frac{px}{q}.x\,dx = -\frac{q^2}{p^2}\int_0^{2p\pi} Cos.y.y\,dy = 0, (\text{V.T.}255.\ \text{N}^\circ.1), (k=\infty), \quad (54)$$

$$\int_0^{2\pi qk} Sin.\frac{px}{q}\,dx = -\int_0^{2q\pi} Sin.\frac{px}{q}\,x\,dx = -\frac{q^2}{p^2}\int_0^{2p\pi} Sin.y.y\,dy\,,\ (k=\infty).$$

In de beide laatste is $x = \frac{q}{p}y$ genomen. Om de laatste bepaalde integraal te vinden, zal men den grensafstand 0 tot $2p\pi$ in p andere moeten verdeelen, die elk 2π bedragen, namelijk van 0 tot 2π, van 2π tot 4π, enz. van $c.2\pi$ tot $(c-1).2\pi$ en van $(p-1).2\pi$ tot $p.2\pi$. Verder in eenige integraal, van $c.2\pi$ tot $(c+1).2\pi$ genomen, moet men $y = 2c\pi + x$ stellen, dan worden de grenzen van x: 0 en 2π; met $dx = dy$, $Sin.x = Sin.y$; daar verder voor de factor y onder het integraalteeken $2c\pi + x$ komt, kan men zoodanige integraal in twee andere ontbinden, eene met $2c\pi$ als factor, (die als constant buiten het integraalteeken te brengen is), en eene andere, waar x als factor onder het integraalteeken blijft staan, dat is

$$\int_{c.2\pi}^{(c+1).2\pi} Sin.y.y\,dy = 2c\pi\int_0^{2\pi} Sin.x\,dx + \int_0^{2\pi} Sin.x.x\,dx\,.$$

De integralen der eerste soort zijn alle van denzelfden vorm als de eerste der integralen (ak) en verdwijnen dus. Die der tweede soort zijn daarentegen alle gelijk, en hebben volgens mijne Tafels T. 250. N°. 1 tot waarde -2π; zulke zijn er p en dus is:

$$\int_0^{2p\pi} Sin.x.x\,dx = -2p\pi\,; \ldots\ldots \quad (55)$$

en derhalve

$$\int_0^{2\pi qk} Sin.\frac{px}{q}\,dx = \frac{2q^2\pi}{p}\,,\ (k=\infty) \ldots\ldots \quad (56)$$

Vervolgens geven de theoremata (XLIII) en (XLV), met behulp der reeds gevonden uitkomsten:

$$\int_0^{2\pi qc+b} Sin.\frac{px}{q}dx = \int_0^b Sin.\frac{px}{q}dx = \frac{q}{p}\left(1 - Cos.\frac{pb}{q}\right), \quad \ldots\ldots (57)$$

$$\int_0^{2\pi qc+b} Cos\frac{px}{q}dx = \int_0^b Cos.\frac{px}{q}dx = \frac{q}{p}Sin.\frac{pb}{q}, \quad \ldots\ldots (58)$$

$$\left.\begin{aligned}\int_0^{2\pi qk+b} Sin.\frac{px}{q}dx &= \frac{2q^2\pi}{p} + \int_0^b Sin.\frac{px}{q}dx = \frac{2q^2\pi}{p} + \frac{q}{p}\left(1 - Cos.\frac{pb}{q}\right), \\ \int_0^{2\pi qk+b} Cos.\frac{px}{q}dx &= \int_0^b Cos.\frac{px}{q}dx \qquad = \frac{q}{p}Sin.\frac{pb}{q}.\end{aligned}\right\} (k=\infty). \begin{matrix}(59)\\ \ldots\ldots (60)\end{matrix}$$

Hieruit ziet men, dat de gewoonlijk gebruikte uitkomsten

$$\int_0^\infty Sin.x\,dx = 1 \quad \text{en} \quad \int_0^\infty Cos.x\,dx = 0,$$

zie *Tables etc.*, T. 96, N°. 2, 3, niet geldende kunnen zijn.

RECHERCHES PALÉONTOLOGIQUES

SUR

LE TERRAIN TERTIAIRE DU LIMBOURG NEERLANDAIS,

PAR

J. BOSQUET.

Publiées par l'Académie Royale des Sciences à Amsterdam.

AVEC DEUX PLANCHES.



AMSTERDAM,
C. G. VAN DER POST.
1859.

RECHERCHES PALÉONTOLOGIQUES

SUR

LE TERRAIN TERTIAIRE DU LIMBOURG NEERLANDAIS,

PAR

J. BOSQUET.



AVANT-PROPOS.

Les couches tertiaires du Limbourg Neerlandais semblent être beaucoup moins riches en débris organiques, que celles du Limbourg Belge. C'est-là peut-être une des principales causes, pour lesquelles elles n'avaient été que fort peu explorées jusqu'à présent sous le point de vue paléontologique. Leur Faune fossile connue était en effet restée à peu près insignifiante. Elle ne consistait jusqu'ici qu'en une douzaine d'espèces, qui ont été mentionnées en partie, par Mr. A. W. G. van Riemsdijk en 1844, par le Dr. H. de Bey en 1849, et par moi en 1852 *.

Cependant les dernières recherches faites dans le Duché, tant par Mr. Thierens que par moi, et surtout celles, qui ont été commencées sous les auspices de Mr. le Dr. W. C. H. Staring, ont été couronnées de quelque succès. Elles ont amené la découverte d'un nombre assez considérable d'échantillons et d'espèces, qui entreront pour la plupart dans les collections du Musée géologique de Harlem.

* Je crois ne pas pouvoir citer ici la liste de fossiles tertiaires de Schin-op-Geul publiée en 1857, dans le 1ier Rapport sur les travaux exécutés par la Société des Mines pour la Neerlande (*Bergwerk-Vereeniging voor Nederland*), parcequ'il me semble que cette liste (même avec les singulières modifications qui y ont été faites dans le Rapport suivant publié en 1858), ne peut être signalée comme méritant une entière confiance.

S

Le Dr. Staring, qui est chargé de la confection de la Carte géologique * de la Neerlande, publie en ce moment, sur la constitution géologique du Royaume, un ouvrage fort intéressant †, dans lequel il se propose de donner des listes générales des fossiles recueillis dans les divers terrains de notre pays.

Cet explorateur savant et zélé, qui veut bien m'honorer de son amitié, m'ayant prié de dresser ces listes, pour autant qu'elles concernent le terrain crétacé du Limbourg, ainsi que le terrain tertiaire de ce Duché et de la Gueldre, j'ai commencé depuis quelque temps l'étude de nos matériaux de la formation tertiaire. Par cette étude je suis parvenu à déterminer 90 espèces trouvées dans le terrain tertiaire du Limbourg. La Faune fossile connue de ces couches tertiaires a donc maintenant été plus que septuplée, et je n'ai aucun doute que cette Faune ne s'accroise rapidement par la suite, du moins, si les divers amateurs actuels continuent leurs recherches avec le zèle louable, qui les anime depuis quelques années.

Ayant reconnu par mon travail de détermination, que parmi les 90 espèces du Limbourg il y en a quelques-unes, qui sont ou tout-à-fait nouvelles, ou décrites et figurées par divers auteurs d'une manière insuffisante ou incorrecte, j'ai cru rendre service à la science en faisant connaître ces espèces, à l'aide de déscriptions détaillées et de figures suffisamment agrandies. C'est-là l'objet de la présente Notice, que j'ai l'honneur de soumettre au jugement de l'Académie, et pour laquelle je prends la liberté de lui demander une place dans le recueil de ses Mémoires.

Des 89 espèces d'animaux découvertes dans le terrain tertiaire du Limbourg, il y en a 1, qui fait partie de la classe des Poissons; 12, qui appartiennent à la classe des Crustacés, dont la majeure partie, c'est-à-dire 11 de l'ordre des Ostracodes, et une seule de l'ordre des Balanides; 2 autres espèces font partie de la classe des Vers, et de l'ordre des Tubicolés; une seule se rapporte à la classe des Amorphozoaires; trois autres à celle des Foraminifères, et tout le reste enfin fait partie de la classe des Mollusques; 37 de ces dernières appartiennent à l'ordre des Gastéropodes et les 33 autres espèces à l'ordre des Cormopodes. Je ne puis mentionner jusqu'ici aucun débris organique du Règne végétal, à l'exception d'une seule espèce apparte-

* La première feuille de cette Carte vient de paraître.

† Cet ouvrage ne sera que le Prodrome d'une description géologique plus détaillée.

nant à la région des Thallophytes, section des Protophytes, classe et ordre des Characés.

Les 24 espèces nouvelles que je décris ci-après, se répartissent ainsi: 2 dans la classe des Vers, ordre des Tubicolés; 2 dans la classe des Foraminifères, ordre des Agathistègues, et 19 dans la classe des Mollusques; dont 17 dans l'ordre des Gastéropodes et deux seulement dans l'ordre des Cormopodes. A ces restes d'animaux j'ai pu ajouter une plante nouvelle qui doit être rangée dans la classe et dans l'ordre des Characés.

Tous ces restes fossiles ne proviennent que de deux des systèmes qui ont été établis par le célèbre Géologue Belge, feu Mr. André Dumont: le système Tongrien et le système Rupélien. Le Dr. Beyrich range ces couches à titre de sous-divisions dans les dépôts de son époque oligocène. Dans le système Boldérien, étage nymphéen Dum. (Oligocène supérieur = *Sternbergergestein* Beyrich) il n'a été recueilli jusqu'ici, à ma connaissance dans le Limbourg, aucun autre débris organique qu'un fragment de feuille d'un Végétal Monocotylédoné. Cette feuille a été découverte par moi, dans une couche d'argile schistoïde, épaisse de quelques centimétres seulement, entre les villages de Daneken et Zweikhuizen, au S. S. O. de la ville de Sittard. Cette feuille n'étant pas tout-à-fait complète, n'a pas encore pu être déterminée avec quelque certitude.

Quant aux conclusions géologiques que l'on peut tirer de la comparaison des espèces tertiaires du Limbourg avec celles d'autres pays, je renverrai au mémoire précité de Monsieur le Dr. Staring. Ce Géologue publiera pareillement dans son mémoire, le tableau de la distribution géologique et géographique de la Faune dont il s'agit.

Je ferai seulement remarquer ici en passant, qu'en jetant un simple coup-d'oeil sur ce Tableau, l'on s'apercevra immédiatement que c'est dans l'assise supérieure du système Tongrien et dans l'assise inférieure du système Rupélien du Limbourg Belge, que se retrouvent le plus grand nombre d'espèces identiques avec des espèces du Duché de Limbourg. Aussi nous n'avons pas le moindre doute que les deux étages du Limbourg Neerlandais, dans lesquels nous avons eu le bonheur de pouvoir recueillir le plus grand nombre d'espèces, ne représentent ces deux étages, malgré les différences de puissance et la présence du très-petit nombre d'espèces que nous ne connaissons pas encore dans les assises homonymes de la Belgique.

Maestricht, le 24 Octobre 1858.

Classis I. VERMES.

Familia. TUBICOLAE.

1. SERPULA DISTORTA n. sp.
Pl. I, fig. 1 et 2, *a*, *b*.

Le test de cette très-petite espèce est sub-cylindrique; il est adhérent dans toute sa longueur, et le plus souvent il n'est formé que de deux tours disjoints, qui sont ordinairement régulièrement enroulés dans un même plan et à peu près constamment de gauche à droite. Ces tours sont en général peu distants l'un de l'autre; ils sont plus que sémicylindriques, et leur surface n'est ornée que de stries transversales presque régulières d'accroisement. La bouche est parfaitement circulaire.

Dimensions. Le tube acquiert 0,8—0,9 m.m. d'épaisseur à son extrémité antérieure. L'espace, que couvre cette petite Serpule, est ordinairement de 3, rarement de 4 m.m.s.

Gisement et localités. Cette Serpule est assez rare dans le Limbourg Neerlandais et n'a été trouvée jusqu'ici, que dans la couche à Pétoncles de l'étage inférieur du système Rupélien, près de Vliek (Commune d'Ulestraten). Elle se rencontre en Belgique dans la même couche tertiaire à Bergh, près de Klein-Spauwen. Je ne l'ai observée jusqu'ici qu'à l'intérieur de la bouche de la *Voluta Rathieri* et des *Buccinum Gossardi* et *Thierensi*.

2. GALEOLARIA ACUTIROSTRIS n. sp.
Pl. I, fig. 3, *a*, *b*.

Je ne connais jusqu'ici que des fragments de cette Galéolaire. Le fragment le mieux conservé de ma collection, celui que j'ai figuré, provient de Bergh, dans le Limbourg Belge.

Cette espèce semble avoir été adhérente dans toute sa longueur; son test est cylindrique, obscurement sub-trigone et plus ou moins tortueux. Sa bouche porte supérieurement une languette dentiforme triangulaire, qui se termine en avant en une pointe aiguë. Les indices des accroissements successifs sont assez régulièrement espacés, et les contours des lignes d'accroissement correspondent exactement au contour de la bouche. Le contour interne de celle-ci est sub-orbiculaire.

Dimensions. La partie figurée du tube a 1,25 m.m. d'épaisseur; la longueur de ce fragment est de 12 m.m.

Gisement et localités. Elle semble être rare dans l'étage inférieur du système Rupélien (couche à Petoncles) de Vliek, dans le Limbourg Neerlandais. Elle est de même peu commune dans le même étage tertiaire à Bergh, au Vieux-Jonc, à Colmont et à Looz, dans le Limbourg Belge.

Classis II. **MOLLUSCA.**

Ordo I. **GASTROPODA.**

3. MELANIA CARINATA n. sp.

Pl. I, fig. 4, *a—c.*

Coquille ovale-conoïdale; à sommet obtus; composée de 6—7 tours lisses et luisants, séparés par des sutures assez profondes. La partie embryonale est formée de 1½—2 tours assez courts; tous les tours snivants sont très-convexes, fortement carénés au milieu et augmentent régulièrement et assez rapidement en largeur. La hauteur du dernier est à peu près égale à celle de la spire. Quoique la surface est lisse et luisante, on y aperçoit quelques lignes longitudinales d'accroissement, qui s'effacent sur la carène. La bouche est ovale et pointue au sommet. La lèvre droite parait être simple (elle était cassée dans l'échantillon); la gauche est calleuse, peu épaisse et recouvre le bord supérieur et la columelle. Cette dernière est courte et assez fortement arquée.

Dimensions. L'échantillon étant cassé, je ne puis en indiquer les dimensions, que d'une manière approximative. Il avait environ 7—8 millimètres de hauteur.

Gisement et localités. Cette belle petite *Melania* n'a été trouvée jusqu'ici, à ma connaissance, que dans la couche à Pétoncles de l'étage inférieur du système Rupélien, à Vliek. Il est vivement à regretter que l'unique échantillon, qui a été recueilli, est tombé en fragments au moment d'en faire les dessins. Heureusement, ce malheur n'est arrivé, que lorsque les contours étaient déjà achevés.

4. NEMATURA DUNKERI n. sp.

Pl. I, fig. 5, *a—c.*

Coquille grêle, très-petite, ovale-allongée, presque cylindrique; lisse, luisante, à sommet obtus; formée de 4½—5 tours convexes-déprimés, séparés par une suture peu profonde, mais bien distincte; ouverture sub-orbiculaire, rétrécie.

Dimensions. Longueur 1,5 m.m.; épaisseur 0,75 m.m.

Rapports et différences. Cette espèce ne peut pas être confondue avec la *Nematura pupa* Nyst sp., qui se trouve avec elle dans les mêmes couches tertiaires du Limbourg Neerlandais. L'espèce de l'Auteur Belge se distingue au premier abord de la nôtre, par ses dimensions tout-à-fait différentes, par ses tours plus convexes et par ses sutures plus profondes. La *Nematura Schwartzenbergi,* que le Dr. Dunker n'a fait connaître que par une simple description, et dont ce paléontologiste distingué n'a pas indiqué les dimensions, parait être fort rapprochée de l'espèce que je viens de décrire. Cependant, comme le Dr. Dunker dit, que l'espèce de *Grossalmerode* a des sutures encore plus profondes que la *Nematura pupa,* il est impossible de douter que mon espèce n'en soit différente.

Gisement et localités. Cette espèce semble ne pas être rare dans la couche à Nucules et dans la couche à Pétoncles à Vliek; elle parait être beaucoup plus rare dans l'argile sableuse au Goudsberg et à Klimmen, dans le Limbourg Neerlandais. Malgré des recherches nombreuses et assidues dans les sables à Pétoncles de Bergh, près de Klein-Spauwen, je n'y ai recueilli jusqu'ici que deux échantillons, qui sont probablement les seuls qui ont été trouvés jusqu'ici en Belgique.

5. NEMATURA BIDENS n. sp.

Pl. I, fig. 8, *a—c.*

La coquille de cette très-petite espèce est d'une forme ovale sub-cylindrique; elle se compose de 4—4½ tours de spire à surface lisse et luisante, et n'offrant même aucune trâce de lignes d'accroissement. La partie embryonale est formée de deux tours; le premier de ces tours est presque entièrement enveloppé par le second; celui-ci est très-convexe, et est séparé du troisième par une suture très-profonde; les deux derniers tours sont déprimés et ne sont séparés que par une suture faiblement excavée: Le dernier tour est plus grand que les trois autres réunis; l'ouverture est ovale-subcirculaire, retrécie, à péristome continu et simple; celui-ci est garni à l'intérieur de deux proéminences dentiformes; l'une en forme de bouton, située du côté columellaire; l'autre aplatie, un peu relevée, située au côté opposé du bord supérieur. La partie comprise entre et en dessous de ces deux dents est sensiblement épaissie à une faible distance du bord, ou plutôt en dessous de

l'espace, qui a été (sans aucun doute) occupé par l'opercule. Celui-ci m'est inconnu jusqu'ici.

Dimensions. Longueur 1,2 m.m.; largeur 0,6 m.m. La hauteur du dernier tour est de 0,55 m.m.

Observations. J'ai douté pendant longtemps si l'espèce, que je viens de décrire devait être rapportée ou non au genre (sous-genre?) *Nematura.* Ce doute a pourtant été dissipé, lorsque j'ai trouvé, que les deux petites protubérances dentiformes du bord supérieur de la bouche, si developpées dans cette espèce, existent pareillement, mais pour ainsi dire seulement à l'état rudimentaire, dans la *Nematura pupa* * Nyst sp. Celle-ci, ayant une ouverture retrécie, ne peut, je pense, être rapportée qu'au genre *Nematura* de Benson.

Venant de trouver dans la localité de Vliek, plusieurs échantillons d'un petit opercule, qui, à cause de sa forme, de sa grandeur et de ses caractères appartient presque indubitablement à la *Nematura pupa,* j'ai cru utile de le figurer †. J'ai donné en même temps des figures de la coquille § (qui a été assez mal représentée dans l'ouvrage cité de Mr. Nyst) afin de faire mieux ressortir ses différences d'avec les deux espèces nouvelles que je décris.

L'opercule figuré offre au côté externe gauche une tache triangulaire d'un rose-violet, et le long de son bord droit une large bande d'un violet-obsur. Le plus grand nombre des échantillons de la coquille sont d'un blanc de lait; mais quelques-uns de ceux qui proviennent de la localité de Vliek, ont pareillement une teinte d'un rose-violet.

Gisement et localités. La *Nematura bidens* n'a été trouvée jusqu'à présent, que dans l'étage supérieur du système Tongrien au Goudsberg (commune de Hulsberg) et dans une assise absolument identique avec celle du Goudsberg, près de Vliek. Elle semble être assez rare. Je n'en connais jusqu'ici que sept échantillons: trois dans le Musée Géologique de Harlem, deux dans la collection de Mr. Thierens et deux dans la mienne.

6. RISSOA BEYRICHI n. sp.

Pl. I, fig. 9, *a—c.*

Coquille ovale-subglobuleuse, assez solide; composée de cinq tours très-

* H. Nyst, 1843. *Description des coquilles et des Polypiers fossiles des terrains tertiaires de la Belgique*, pag. 405, pl. XXXVII, fig. 6, *a* et *c*.

† Voyez ma pl. I, fig. 7, *a*, *b*.

§ Voyez la même planche, fig. 6, *a*, *b*, c.

convexes, qui s'accroissent rapidement, et qui, quoique presque entièrement enveloppés par le dernier tour, sont pourtant nettement séparés les uns des autres, par des sutures profondes. Les $2\frac{1}{2}$—3 premiers tours, formant la partie embryonale, sont lisses; la surface des deux autres, est creusée de plusieurs lignes transversales extrêmement fines, qui deviennent plus apparentes vers la base du dernier; le tiers supérieur de celui-ci et la moitié supérieure de l'avant-dernier est ornée en outre de nombreux sillons longitudinaux très-rapprochés les uns des autres. Ces sillons, imperceptibles à l'oeil nu, sont le plus prononcés à côté des sutures, et s'effacent insensiblement avant d'avoir atteint la partie la plus convexe de ces tours. La bouche est ovale-pointue; son bord droit est simple, mais assez épais; la lèvre gauche est repliée sur la columelle, qui est aplatie et faiblement arquée.

J'ai dédié cette *Rissoa* à l'illustre Auteur du beau travail sur les Mollusques du terrain tertiaire du Nord de l'Allemagne.

Dimensions. Longueur 1,6 m.m.; épaisseur 1,2 m.m. La hauteur du dernier tour est à celle de la coquille comme $\frac{53}{100}$.

Rapports et différences. Cette très-petite *Rissoa* est bien distincte, et ne peut être confondue avec aucune de ses nombreuses congénères.

Gisement et localités. La *Rissoa Beyrichi* n'a été trouvée jusqu'ici dans le Limbourg Neerlandais, que dans la couche à Nucules de l'étage inférieur du système Rupélien à Vliek. Dans le Limbourg Belge je l'ai recueillie pareillement à Bergh, dans la même couche tertiaire. Elle semble être extrêmement rare, puisque, dans chacune des localités citées, il n'a été trouvé qu'un seul échantillon.

7. PLANORBIS SCHULZIANUS DUNKER 1854.

Pl. I, fig. 10, *a—d*.

PLANORBIS SCHULZIANUS DUNKER, 1854. Ueber die in der Braunkohlen-formation von Grossalmerode in neuerer Zeit entdeckten susswasser Mollusken, pag. 8, 9. (Aus den 3ten Hefte, des 6ten Bandes, der Studien des Göttingischen Vereins Bergmännischer Freunde).

Ce très-petit *Planorbe* est largement ombiliqué en dessous, et plan en dessous; il est formé de 3—$3\frac{1}{2}$ tours non embrassants, séparés par une suture profonde et plus ou moins carénés des deux côtés; ces tours sont couverts de stries transversales très-fines et pourtant très-apparentes; le bord supérieur de la bouche n'est pas saillant.

Dimensions. Longueur 2 m.m.; épaisseur 0,5 m.m.

Rapports et différences. Je dois à l'obligeance de Mr. le Baron Ferd. de Francq, la communication d'une espèce, qui se rapproche beaucoup du *Plan. Schulzianus* et qui a été recueillie dans une couche du même âge géologique; c'est-à-dire les sables supérieurs de Jeurre et à Etréchy, en France. Je regarde cette espèce comme bien distincte du *Pl. Schulzianus.* Elle diffère essentiellement de celui-ci: 1°. par son côté inférieur assez profondement concave au centre; 2°. parceque la face supérieure de ses tours offre au milieu une partie saillante et obtuse, à la surface de laquelle les stries transversales proéminentes décrivent une courbe bien marquée; et 3°. enfin, parceque les deux carènes, qui ornent la surface de ses tours occupent une place tout-à-fait différente: l'une de ces carènes se trouve sur la ligne longitudinale médiane des tours, tandis que l'autre se voit sur la même ligne que la suture inférieure. De cette disposition resulte, que ces deux carènes ne sont visibles qu'à la surface du dernier tour.

Considerant l'espèce Française comme nouvelle, et croyant que cette caractéristique différentielle d'avec le *Planorbis Schulzianus,* suffira pour la faire reconnaître, je me crois en droit de lui imposer un nom et je l'appellerai *Planorbis Deshayesi.*

Gisement et localités. Le *Planorbis Schulzianus* a été trouvé par Mr. Thiekens et par moi, dans l'étage supérieur du système Tongrien et dans l'étage inférieur du système Rupélien: à Vliek, à Humkoven, à Klimmen, au Goudsberg (commune de Hulsberg) et dans le Krekelenbosch (commune de Schin-op-Geul). Il se rencontre pareillement dans les couches contemporaines du Limbourg Belge: à Bergh près de Klein-Spauwen, au Vieux Jonc, à Heerderen, à Hénis et à Looz. Mr. le Dr. Guill. Dunker de Marbourg a reçu les échantillons qu'il a décrit (sans figurer l'espèce), de Mr. Hermann Schulz, et cet amateur a recueilli ces échantillons dans les lignites de Grossalmerode. Ces lignites appartiennent indubitablement, au même étage géologique, que l'étage supérieur du système Tongrien, qui renferme pareillement des lignites.

8. SUCCINEA UBAGHSI n. sp.

Pl. I, fig. 11, *a—c.*

SUCCINEA OBLONGA nyst, 1843. Description des coquilles et des Polypiers fossiles des terrains tertiaires de la Belgique, pag. 466, pl. XXXIX, fig. 11, non Draparnaud.

Coquille ovale-allongée, conoïdale; formée de 3½—4 tours assez fortement

convexes; ceux-ci sont séparés par une suture profonde et leur surface est couverte de nombreuses stries d'accroissement irrégulières et bien prononcées; le dernier tour dépasse un tant soit peu les deux tiers de la hauteur totale; la spire, qui est obtusement pointue au sommet, égale à peu près la hauteur de l'ouverture; celle-ci est ovale-oblique et largement arrondie à son extrémité inférieure.

Dimensions. Longueur 14 m.m., largeur 8,5 m.m.

Rapports et différences. Cette espèce a les plus grands rapports avec la *Succinea oblonga* Drap. actuellement vivante. Il n'est donc nullement étonnant, qu'elle ait été rapportée avec doute en 1843 à l'espèce de Draparnaud, par Mr. H. Nyst, à qui j'avais communiqué l'unique échantillon, trouvé dans le sable à Pétoncles de Bergh, près de Klein-Spauwen. Comme la figure, qui a été donnée dans l'Ouvrage sur les fossiles tertiaires de Belgique ne me semble pas tout-à-fait correcte, j'ai cru utile de représenter de nouveau le seul échantillon, recueilli dans le terrain tertiaire du Limbourg Neerlandais. Cet échantillon, qui a des dimensions doubles de celles de la *Succ. oblonga* est à ma connaissance le seul, qui ait été trouvé depuis la publication du beau travail de Mr. H. Nyst.

Gisement et localités. L'échantillon décrit et figuré dans ce mémoire vient d'être recueilli par Mr. Ubaghs de Fauquemont dans un sable argileux, appartenant à l'étage supérieur du système Tongrien au N. O. du village de Klimmen.

9. CYCLOSTOMA FRAGILE n. sp.

Pl. I, fig. 12, *a—c.*

Coquille sub-ombiliquée, très-fragile, ovale-conoïdale, formée de 4½— 5 tours, séparés par des sutures profondes. Le premier de ces tours, (partie embryonale) est tout-à-fait lisse; les deux à trois moyens, dont le diamètre augmente régulièrement et assez rapidement, sont couverts de lignes longitudinales d'accroissement irrégulières peu apparentes; ces lignes sont coupées par d'autres transversales proéminentes alternativement plus minces et plus grosses. Le dernier tour est très-ventru; il est plus de deux fois aussi large que l'avant-dernier, et offre, dans ses deux tiers supérieurs, à peu près les mêmes ornements que celui-ci. Parmi les lignes, ou plutôt les côtes minces transversales, qui ornent la partie médiane de sa surface, on en remarque quatre, qui sont plus proéminentes et plus grosses que les autres. A la surface du

tiers inférieur du dernier tour, toutes les lignes transversales sont extrêmement minces. Le péristome est continu, presque disjoint; il est lisse, très-ouvert, mais non épaissi. L'opercule m'est inconnu.

Dimensions. Hauteur 5,25 m.m.; largeur 3 m.m. Le diamètre de la bouche sans le péristome est de 1,50 m.m.; la hauteur du dernier tour est égale aux $\frac{2}{5}$ de la hauteur totale.

Gisement et localités. Le *Cyclostoma fragile* semble ne pas être rare dans le sable argileux à Pétoncles et dans la couche à Nucules (Etage inférieur du système Rupélien Dum.) de Vlick; cependant, il est tellement fragile que jusqu'ici nous n'avons pas été assez heureux (Monsieur Thierens et moi) d'en trouver un seul échantillon entier. A celui qui a été figuré, le péristome manque, et cette partie a du être restaurée dans la figure, d'après un autre échantillon incomplet, dans lequel cependant cette partie est complète.

10. PLEUROTOMA HÖRNESI n. sp.

Pl. I, fig. 13, *a—c.*

Quoique jusqu'ici je n'aie à ma disposition qu'un échantillon sub-adulte, ou même jeune de ce beau *Pleurotome*, j'ai cru cependant devoir le faire connaître dès à présent, parceque je suis d'avis que cet échantillon offre déja des caractères distinctifs suffisants.

L'échantillon n'est formé que de cinq tours et demi, tandis que la coquille adulte pourra bien en avoir un nombre à peu près double, 8—10, si je ne me trompe. Il est fusiforme-turriculé; à spire conoïdale, obtusement pointue au sommet. La portion embryonale n'est composée que de deux tours. Le premier, et la moitié du sécond sont tout-à-fait lisses; la surface de l'autre moitié de ce dernier, n'est couverte que de quelques petites côtes longitudinales arquées et assez rapprochées les unes des autres; ensuite viennent $2\frac{1}{2}$—3 tours moyens; ceux-ci et le dernier, offrent immédiatement en dessous des sutures, une partie déprimée, séparée de la partie restante par un sillon interrompu qui produit une sorte d'étranglement. La surface de cette partie déprimée, ainsi que celle des tours moyens et de la moitié supérieure du dernier tour, est ornée de plusieurs plis longitudinaux, coupés par des sillons transversaux. A la surface du cinquième, on compte une douzaine de ces plis longitudinaux; ceux-ci sont fortement saillants et sinueux, comme géniculés vers le tiers inférieur des tours moyens, et sont accompagnés de lignes

d'accroissement encore plus fortement courbées. Le dernier tour de l'échantillon, est ventru dans sa moitié supérieure; il se termine par un canal passablement court et assez épais. Le canal et la partie en pente de ce tour, sont couverts de côtes transversales très-minces. A la surface du canal ces côtes sont très-rapprochées les unes des autres. La bouche est ovale-allongée; son bord droit parait avoir été trancbant, et d'après la direction des lignes d'accroissement qui couvrent les trois derniers tours, ce bord est creusé, dans sa moitié supérieure, d'un sinus assez large et très-profond. La columelle n'est recouverte que d'une lame fort mince.

Dimensions. La longueur de l'échantillon est de 5,75 m.m. et sa plus grande largeur de 2,50 m.m.

Rapports et différences. La partie que nous connaissons de cette espèce se rapproche, par plusieurs de ses caractères, de la *Pleurotoma Zehneri* Hörn. * de Baden près de Vienne. Elle se distingue cependant parfaitement de cette dernière. Elle diffère essentiellement de cette espèce Miocène: 1°. par sa forme générale moins grêle et des dimensions proportionnellement plus fortes; 2°. par ses plis longitudinaux plus saillants et plus fortement sinués; 3°. par son canal relativement plus long, et 4°. par la portion déprimée qui borde la partie supérieure des tours, plus large et couverte, comme ces derniers, de sillons transversaux.

J'ai dédié cette espèce au Dr. Hörnes, le savant Auteur du magnifique ouvrage sur les fossiles du Bassin tertiaire de Vienne.

Gisement et localités. L'unique échantillon connu fait partie du Musée Géologique de Harlem. Il a été recueilli dans la couche à Pétoncles de l'étage inférieur du système Rupélien de Vliek.

11. BUCCINUM THIERENSI n. sp.

Pl. I, fig. 14, *a—c.*

La partie embryonale de ce beau Buccin est un peu usée dans tous les échantillons, que j'ai à ma disposition. Elle est conique et paraît n'être formée que de 2—2½ tours lisses; ensuite viennent 3—5½ tours moyens; le premier légèrement et les suivants assez fortement convexes. Ces tours sont séparés entr'eux et du dernier, par une suture faiblement, mais pourtant bien

---

* Hörnes 1857. *Mollusken des tertiärbeckens von Wien.* Erste Band, pag. 683, taf. 52, fig. 10 *a, b.*

distinctement, canaliculée. La surface du premier tour moyen offre 6—7 grosses côtes longitudinales arquées sub-sinueuses. Le nombre de ces côtes augmente graduellement de une à deux, (généralement de deux), à la surface de chacun des tours suivants et s'élève (dans les échantillons parfaitement adultes), à 12—14 à la surface du dernier tour. Celui-ci, dont la hauteur dépasse de beaucoup celle de la spire, est fortement renflé. Sa partie ventrue se rattache par une pente assez-rapide à la crète produite par les accroissements successifs de l'entaille inférieure. Tout près de la suture, les côtes longitudinales sont coupées par deux sillons transversaux assez profonds et constamment bien marqués; la partie inférieure en pente du dernier tour, est ornée de plusieurs lignes creuses et de côtes alternativement plus fortes. La crète inférieure est couverte de lames d'accroissement bien apparentes, et est limitée du côté supérieur, par une arète saillante. Le bord externe de la bouche est assez mince et tout-à-fait lisse à son côté interne. La lame columellaire, qui est passablement épaisse, recouvre une assez grande étendue de la columelle et du bord supérieur de la bouche.

Dimensions. L'échantillon figuré de ma collection a 28 m.m. de longueur. Sa plus grande épaisseur est de 16 m.m.

Rapports et différences. Le *Buccinum Thierensi* se rapproche du *B. Gossardi* Nyst *, qui se trouve avec lui dans les mêmes couches tertiaires. Il offre cependant des caractères constants par lesquels il s'en distingue bien nettement. Il en diffère d'abord par sa forme plus raccourcie; par ses tours de spire plus fortement ventrus, et non déprimés en dessous des sutures; par ses côtes longitudinales en général plus fortes et moins obliques; par la lèvre gauche de la bouche plus épaisse, et enfin, par le manque total de stries transversales proéminentes à la surface de la partie médiane des tours. Le *Bucc. suturosum* Nyst † est une espèce bien distincte, dont malheureusement il n'a été donné jusqu'ici qu'une description insuffisante, et une figure si mauvaise, qu'il reste douteux pour moi, si celle-ci a été faite ou non sur un échantillon usé de mon *B. Thierensi*. Le *B. suturosum* (c'est-à-dire l'espèce que je comprends sous ce nom) diffère du *B. Thierensi*, par sa forme beaucoup plus grêle; par la hauteur de sa spire égale à ou un peu plus

* H. Nyst. 1843. *Description des coquilles et de Polypiers fossiles des terrains tertiaires de la Belgique*, page 578, Pl. XLIII, fig. 15.

† H. Nyst, 1843. *Ibidem*, page 579, Pl. XLIII, fig. 16.

grande que celle du dernier tour, par ses sutures plus profondement canaliculées et par ses tours lisses et sans trace de côtes longitudinales.

Observation. J'ai dédié cette belle espèce à M. F. THIERENS, qui en a fait la découverte dans le Limbourg Neerlandais.

Gisement et localités. Ce *Buccin* n'a été trouvé jusqu'ici dans le Duché de Limbourg que dans l'étage inférieur du système Rupélien DUM. (couche à *Nucula Lyelliana*) à Vliek. Je le possedais depuis longtemps de cette même couche, ainsi que des sables à Pétoncles du même étage du système Rupélien de Bergh en Belgique. L'échantillon figuré provient de cette dernière localité.

12. ODONTOSTOMA PYRAMIDALE n. sp.

Pl. I, fig. 15, *a—c.*

Coquille assez épaisse, allongée-conoïdale, turriculée, formée de 9 tours aplatis, lisses, et séparés par des sutures bien distinctes; le sommet de la spire est obtusement pointu. Celle-ci commence par une portion embryonale formée de deux tours, ensuite viennent 6 tours moyens, tous à peu près plus de deux fois aussi larges que hauts; le dernier tour est subanguleux au milieu. La bouche affecte une forme ovale-subtétragonale; son bord droit est assez mince, presque tranchant, et tout-à-fait lisse du côté interne; la columelle et toute la partie supérieure de la bouche, sont recouvertes d'une lame bien distincte, qui cache un ombilic très-étroit et qui porte au milieu un pli dentiforme aigu et très-gros.

Dimensions. L'échantillon figuré a 5 m.m. de longueur; sa plus grande épaisseur est de 1,75 m.m. La hauteur de sa bouche n'est que de 1,5 m.m., ce qui fait $\frac{24}{100}$ de la longueur totale de l'échantillon.

Rapports et différences. Cette espèce est voisine de *l'Odontostoma plicatum* *. Elle se distingue bien nettement de cette dernière par sa forme plus allongée, par sa spire formée d'un nombre de tours plus grand, par ses tours de spire proportionnellement plus étroits et surtout par le manque total des plis au côté interne du bord droit de la bouche, sur la présence desquels le nom de *plicatum* a été fondé.

Gisement et localités. Cet *Odontostoma* semble être fort rare. Je n'en ai

---

* *Turbo plicatus* MONTAGUE, 1803. Testacea Britannica, pag. 325, Tab. 21.

trouvé qu'un seul échantillon dans le sable à Pétoncles de Vliek, dans le Limbourg Neerlandais. Pendant mes longues recherches dans le sable à Pétoncles de Bergh, en Belgique, je n'en ai recueilli que trois échantillons, dont le plus complet et le mieux conservé, est celui, qui a été figuré.

13. ODONTOSTOMA SEMPERI n. sp.

Pl. II, fig. 1, *a—c*.

Coquille très-petite, ovale, atténuée au sommet, et formée de 4—5 tours. La portion embryonale a une forme conoïdale et se compose de 1½ à 2 tours lisses; les tours moyens, au nombre de deux seulement, sont déprimés, très-faiblement convexes; le dernier tour est renflé, légèrement déprimé dans son tiers supérieur, et sa hauteur dépasse celle de la spire. Les tours moyens et le dernier sont lisses, ou plutôt l'on n'y aperçoit que des lignes longitudinales d'accroissement, qui deviennent un peu plus apparentes vers la base, à côté de la columelle. Tous ces tours sont séparés par une suture canaliculée, bien distincte. La bouche est obliquement ovalaire, pointue à son extrémité supérieure; le bord droit est tranchant et offre au côté interne, 5—6 plis, ou plutôt des bourrelets, qui ne s'étendent pas jusqu'au bord externe. Le bord columellaire est recouvert par la lèvre gauche, d'où resulte que la coquille semble être ombiliquée.

Dimensions. La hauteur de l'échantillon figuré est de 3 m.m., sa largeur de 1,75 m.m. La hauteur du dernier tour dépasse celle de la spire.

Rapports et différences. Cette espèce a des rapports avec la suivante; mais s'en distingue nettement par sa forme plus allongée, par sa spire composée d'un tour de plus et surtout par les bourrelets transversaux, qui s'élèvent sur le bord interne de la lèvre droite de sa bouche.

Gisement et localités. Cet *Odontostoma* semble être extrêmement rare. Il n'en a été trouvé jusqu'ici, à ma connaissance, qu'un seul échantillon dans la couche à Pétoncles de Vliek, cinq dans la même couche de Bergh, et deux dans le sable glauconifère de l'étage inférieur du système Tongrien à Grimittingen, près de Vliermael.

14. ODONTOSTOMA NYSTI n. sp.

Pl. II, fig. 2, *a—c*.

Cette espèce ressemble beaucoup à la précédente; elle en diffère cepen-

dant assez, je pense, pour devoir être regardée comme distincte. Sa forme d'abord est proportionnellement beaucoup plus raccourcie; avec des dimensions semblables, elle n'est formée que de quatre tours rélativement plus larges; les caractères de sa bouche enfin, la font distinguer au premier abord. Celle-ci est beaucoup plus étroite, obliquement tétragonale; elle se termine supérieurement en un angle bien plus aigu, et sa lèvre droite, au lieu de présenter à son côté interne des bourrelets transversaux, offre, un peu en dessous de son bord tranchant, un bourrelet longitudinal, par lequel elle est retrécie d'une manière remarquable.

Dimensions. L'échantillon figuré a 3 m.m. de longueur, sur 1,8 m.m. d'épaisseur. La hauteur du dernier tour est à peu près de 1,8 m.m.

Gisement et localités. L'Odontostoma Nysti se trouve dans la couche à Pétoncles de Vliek, dans laquelle il a été découvert par Mr. Thierens. Il se trouve également en Belgique, dans la même couche tertiaire à Bergh. Je ne possède de cette dernière localité qu'un seul échantillon, un peu plus petit que celui de Vliek. L'échantillon trouvé à Vliek, fait partie du Musée géologique de Harlem. C'est celui-ci, qui a été figuré.

15. TURBONILLA SANDBERGERI n. sp.

Pl. II, fig. 3, *a—c.*

Coquille allongée-conoïdale, sub-turriculée, formée de 8—9 tours aplatis, lisses, mais peu luisants; séparés par des sutures peu profondes et pourtant bien distinctes. La spire est obtusement pointue; les six tours moyens sont à peu près deux fois aussi larges que hauts; le dernier occupe plus du tiers de la hauteur totale de la coquille. La bouche est obliquement tétragonale; son bord droit est simple et mince; tandis que la lèvre gauche, qui porte à son extrémité supérieure un pli peu épais, recouvre la columelle. Cette dernière est presque droite.

Dimensions. L'échantillon figuré a 6 m.m. de longueur, sur 2 m.m. d'épaisseur. La bouche a 1,25 m.m. de hauteur. La hauteur du dernier tour dépasse le tiers de la hauteur totale.

Rapports et différences. Elle se distingue au premier abord de la suivante par sa forme générale, par un nombre de tours moins considérable, par une épaisseur plus grande, ainsi que par ses tours plus déprimés et séparés par des sutures moins profondes.

J'ai dédié cette *Turbonille* à M. le Dr. **Fridolin Sandberger**, qui public en ce moment un ouvrage important et d'une exécution supérieure sur les coquilles du Bassin tertiaire de Mayence.

Gisement et localités. Cette *Turbonilla* est très-rare à Vliek (Limb. Neerl.), ainsi qu'à Bergh et au Vieux-Jonc (Limbourg Belge). Elle se trouve dans la couche à Pétoncles de l'étage inférieur du système Rupélien Dum. (Oligocène inférieur Beyr.).

16. TURBONILLA TURRICULATA n. sp.

Pl. II, fig. 4, *a—c.*

TORNATELLA SPINA NYST, 1843. Description des coquilles et des polypiers fossiles des terrains tertiaires de la Belgique, pag. 428 (mais pas figure 36 de la Planche 37, ni *Auricula spina* Desh.).

La coquille de cette espèce est turriculée, très-allongée; elle est lisse et luisante et se compose de 11—12 tours. Deux à trois de ces tours forment la partie embryonale, qui est obtusement pointue; les 8—9 tours moyens sont déprimés, faiblement convexes et séparés par une suture assez profonde, bien distincte; le dernier tour est presque $1\frac{1}{2}$ fois aussi haut que l'avant-dernier. La bouche est très-petite; elle est obliquement tétragonale, son bord droit est simple, presque tranchant; la lèvre gauche est fortement repliée sur la columelle; celle-ci est droite, et le pli de sa partie supérieure assez gros.

Dimensions. La longueur du plus grand échantillon que je connais est de 6,5 m.m, sa plus grande épaisseur de 1,5 m.m. Le dernier tour occupe à peu près $\frac{1}{5}$ de la longueur totale de la coquille.

Rapports et différences. Elle a beaucoup de rapports avec la *Turbonilla spina* Desh. sp. * du calcaire grossier du Bassin Parisien. D'après la description et les figures qui ont été données par l'excellent Auteur Français, celle-ci diffère essentiellement de la nôtre, par sa forme encore plus grêle. Sur une longueur moindre elle est formée d'un nombre de tours encore plus considérable.

Observation. L'espèce que je viens de décrire est la même que celle qui a été décrite en 1843 par Mr. H. Nyst, à la page 428 de son ouvrage sur

---

* Deshayes, 1824. *Description des coquilles fossiles des environs de Paris.* Tome second, page 71, pl. VIII, fig. 10, 11.

les coquilles et les polypiers tertiaires de la Belgique et que cet auteur a rapportée à tort à la *Turbonilla spina* de Mr. DESHAYES. La figure qui a été donnée par Mr. NYST, n'ayant pas été faite d'après un échantillon de Klein-Spauwen, ou du moins ne représentant aucunement l'espèce de Klein-Spauwen, je pense qu'il est absolument impossible de lui conserver le nom de *Nystii,* fondé par ALC. D'ORBIGNY en 1852, avec la seule citation de la figure tout-à-fait incorrecte de l'ouvrage de Mr. NYST.

Gisement et localités. Je n'ai trouvé qu'un fragment de cette espèce dans la couche à Pétoncles de Vliek. Elle se trouve en Belgique dans la même couche du système Rupélien (DUM.) à Bergh, près de Klein-Spauwen, ainsi qu'au Vieux-Jonc et à Looz. Elle semble être extrêmement rare dans toutes ces localités. Je dois à l'obligeance de Mr. le baron FERD. DE FRANCQ, un échantillon de la même espèce provenant des sables supérieurs de Fontainebleau et recueilli à Jeurre près d'Etrechy.

La collection du Musée géologique à Harlem, celle de Mr. O. SEMPER à Altona, celle de Mr. NYST à Anvers, celle de Mr. THIERENS et la mienne.

17. TURBONILLA LAEVISSIMA BOSQ.

Pl. II, fig. 5, *a—c.*

TORNATELLA ACICULA NYST, 1843. Description des coquilles et des Polypiers des terrains tertiaires de la Belgique, p. 427 (non LAMARCK nec DESHAYES).

TURBONILLA LAEVISSIMA BOSQUET, Maio 1852, apud LYELL. On the tertiary strata of Belgium and French Flanders, in the Quaterly Journal of the Geological Society of London for August 1852, vol. VIII, pag. 315.

———— AONIS ALC. D'ORBIGNY, Decembro 1852. Prodrome de Paléontologie stratigraphique universelle, vol. III, pag. 5, N°. 70.

Coquille turriculée, subcylindrique, à sommet obtusement pointu; composée de 8—9 tours lisses et luisants. La portion embryonale, formée de 2—3 tours, est conoïdale; le premier de ces trois tours est constamment recourbé en dedans; les 5—6 tours moyens, qui sont plus larges que hauts, sont fortement déprimés, à peine convexes, et séparés par des sutures peu profondes.

L'ouverture est ovale, pointue à son extrémité supérieure; sa lèvre droite est mince, et le pli columellaire très-saillant.

Dimensions. Longueur 4,25 m.m., épaisseur 1,1 m.m. Le dernier tour occupe un peu plus des $\frac{5}{16}$ de la longueur totale. La hauteur de la bouche dépasse un tant soit peu le quart de la hauteur totale de la coquille.

Observations. Il m'a été absolument impossible de voir, même à l'aide d'une forte loupe, les stries transversales, dont parle Mr. NYST, dans la description, qu'il donne de cette espèce: Je n'y aperçois que des stries longitudinales d'accroissement à peine perceptibles.

J'ai cru devoir donner de nouvelles figures de cette *Turbonilla*, parceque celles, qui ont été données dans l'ouvrage cité de Mr. NYST, sont tout-à-fait inexactes.

Rapports et différences. Elle a beaucoup de rapports avec la *Turbonilla acicula* LAMARCK sp. Elle diffère essentiellement de l'espèce du calcaire grossier par une taille moins grande, par sa spire bien moins pointue et surtout par sa surface tout-à-fait dépourvue de lignes transversales.

Gisement et localités. Cette *Turbonilla* est moins rare, que les deux précédentes. Elle se rencontre dans le Limbourg Neerlandais à Humkoven, à Vliek, à Klimmen, au Goudsberg (commune de Hulsberg) et au Krekelenbosch, (commune de Schin-op-Geul). Dans le Limbourg Belge elle a été recueillie dans le sable à Pétoncles à Bergh, au Vieux-Jonc et à Looz, ainsi que dans l'étage supérieur du système Tongrien au Vieux-Jonc, à Herderen et à Hénis.

La collection du Musée géologique à Harlem, celle de Mr. H. NYST à Anvers, celle de Mr. O. SEMPER à Altona, celle de Mr. THIERENS et la mienne.

18. BULLA LAURENTI n. sp.

Pl. II, fig. 6, *a—c.*

Coquille ovale oblongue, lisse; creusée vers la base de quelques stries transversales extrêmement fines; à spire ombiliquée, incluse, à ouverture linéaire, très-étroite, dilatée à la base; à columelle offrant un pli très-apparent, et recouverte par la lèvre gauche, qui est étroite et fort mince.

Dimensions. Longueur 4,1 m.m., épaisseur 2 m.m.

Rapports et différences. Elle a la forme et les caractères extérieurs de la *Bulla angistoma* DESH. * de l'étage Eocène du Bassin Parisien, mais s'en

---

* DESHAYES 1824. *Description des coquilles fossiles des environs de Paris*, Tome second, p. 41, pl. V, fig. 29, 30.

distingue au premier abord, par sa spire incluse, et par le pli de sa columelle. Elle diffère de la *Bulla conulus* DESH. * du même étage tertiaire: par sa forme ovale, par le pli de sa columelle plus prononcé et par le manque absolu de sillons transversaux dans les deux tiers supérieurs de sa surface.

J'ai dédié cette espèce à mon ami, Mr. CH. LAURENT, qui a découvert avec Mr. VAN RIEMSDIJK dans le Limbourg Neerlandais, l'étage inférieur du système Rupélien, duquel provient l'unique échantillon connu de notre pays.

Gisement et localités. Dans le Limbourg Neerlandais il n'a été trouvé jusqu'ici, comme je viens de le dire, qu'un seul échantillon incomplet de la *B. Laurenti.* Cet échantillon a été recueilli à Vliek dans la couche à Pétoncles de l'étage inférieur du système Rupélien. Depuis longtemps je possède quatre individus de la même espèce qui proviennent de la même couche tertiaire, de Bergh en Belgique. C'est d'après un de ces derniers, que mes dessins ont été faits.

19. DENTALIUM SANDBERGERI n. sp.

Pl. II, fig. 7, *a—d.*

Coquille très-allongée, arquée, très-mince en arrière et se terminant presque en pointe; à surface lisse et luisante, à stries d'accroissement à peine perceptibles avec le secours d'une forte loupe; elle est fendue dans la partie médiane postérieure de sa face dorsale, c'est-à-dire à son côté convexe; la fente est assez profonde et tellement étroite, qu'elle est presque imperceptible à l'oeil nu; l'ouverture antérieure est oblique, complètement circulaire et à bords très-minces.

Dimensions. L'échantillon figuré a 35 m.m. de longueur; son plus grand diamètre est de 3,25 m.m.

Rapports et différences. Le *Dentalium Sandbergeri* est voisin du *D. fissura* de LAMARCK †. Il ne diffère essentiellement de celui-ci, que par sa forme un peu plus arquée et approchant un peu plus de la forme conoïdale, et par son entaille postérieure plus profonde et plus étroite.

Gisement et localités. Je n'ai trouvé jusqu'ici dans le Limbourg Neerlan-

* DESHAYES, 1824. *Description des coquilles fossiles des environs de Paris,* Tome second, p. 41, pl. V, fig. 34—36.

† LAMARCK, 1818. *Histoire naturelle des animaux sans vertèbres,* Tome 5, pag. 346, N°. 20.
DESHAYES, 1825. *Anatomie et monographie du Genre Dentale,* pag. 48, pl. IV, fig. 6, 7.

dais qu'un fragment de ce Dentalium. Ce fragment a été recueilli dans la couche à Pétoncles à Vliek. L'échantillon figuré de ma collection provient de la même assise du système Rupélien de Bergh près de Klein-Spauwen. Cette espèce semble être fort rare dans les deux localités, dans lesquelles elle m'est connue.

Ordo II. CORMOPODA.

20. ASTARTE PSEUDO-OMALII BOSQ.

Pl. II, fig. 8. *a*, *b* et 9, *a*, *b*.

ASTARTE OMALII? NYST pro parte 1843. Coq. et Polyp. des terrains tertiaires de la Belgique, pag. 152.

——— PSEUDO-OMALII BOSQUET, 1853, apud D'OMALIUS in Abrégé de Géologie, pag. 586.

Coquille assez fortement renflée, obliquement ovale-trigone, sub-cordiforme, très-inéquilatérale; le côté antérieur occupe à peu près le quart de la longueur totale; ce côté est obtus et le postérieur est obscurement tronqué, sub-anguleux. Le bord inférieur n'est que très-faiblement arqué. La surface est couverte de plusieurs grosses côtes, parallèles aux bords inférieur et postérieur. Ces côtes, dont la largeur égale celle des interstices qui les séparent, disparaissent presque totalement sur le tiers inférieur des vieux individus. Les crochets paraissent avoir été pointus, ils sont cariés dans tous les échantillons, que je connais; et sont obliquement dirigés en avant, au-dessus d'une lunule ovale, atténuée inférieurement, assez profondement excavée et bien nettement circonscrite. Le corselet est lisse; il est profondement concave au centre, très-distinct et de forme lancéolée. Les nymphes sont proportionnellement plus courtes que dans *l'Astarte Omalii*. La charnière se compose dans la valve gauche de deux dents très-fortes, séparées par une fossette assez profonde, servant à recevoir la dent de la valve opposée. Les deux impressions musculaires sont assez profondement excavées, et de forme ovalaire. La postérieure est à peu près d'un tiers plus grande que l'antérieure. Le labre est crénelé dans toute sa longueur.

Dimensions. L'échantillon parfait qui a été figuré, pl. II, fig. 8 a 13,50 m.m. de longueur, autant de largeur, et 8 m.m. d'épaisseur. D'après les

échantillons connus il semble, que ce sont là les plus fortes dimensions, qu'elle atteint.

Rapports et différences. L'*Astarte pseudo-Omalii* quoique bien voisine de *l'Astarte Omalii* LAJONCK * par ses caractères généraux, et surtout par la grande largeur du bord cardinal, me semble cependant devoir en être distinguée. Elle en diffère par sa taille beaucoup plus petite, par sa forme plus raccourcie, et surtout par les fortes côtes concentriques, qui ornent les deux tiers de la surface de ses valves.

Gisement et localités. Dans le Limbourg Neerlandais je n'ai trouvé jusqu'ici qu'un fragment de cette *Astarte.* Ce fragment a été recueilli dans la couche à Pètoncles de l'étage inférieur du système Rupélien à Vliek. J'en possède depuis longtemps deux valves séparées, que j'ai recueillies dans le sable à Pétoncles de Bergh. Mr. THIERENS en a trouvé pareillement deux échantillons: l'un bivalve (celui que j'ai figuré pl. II, fig. 8) dans le sable à Pétoncles de Bergh, et une valve gauche dans la partie supérieure de l'étage inférieur du systéme Tongrien à Grimittingen. Il y a lieu de croire que c'est la même espèce, qui a été trouvée par Mons. H. NYST, dans le même terrain (couche à Pétoncles?) à Looz, et qui a été rapportée par l'Auteur Belge à *l'Ast. Omalii,* espèce Miocène du *crag* de la Belgique et de l'Angleterre.

21. SYNDOSMYA PAPILLATA n. sp.

Pl. II, fig. 10, *a—c.*

Coquille ovale-oblongue, transverse, subtrigone, très-mince et très-fragile; elle est faiblement convexe; sensiblement inéquilatérale; le côté antérieur est demi-ovalaire, il est d'un tiers environ plus long que le postérieur. Le bord supérieur est partagé en deux parties presque égales en longueur par le crochet, qui est assez petit et faiblement proéminent; la partie postérieure du bord supérieur est beaucoup plus déclive que l'antérieure; ces deux parties du bord se raccordent sous un angle ouvert. Le bord inférieur est assez fortement arqué en avant; il est presque droit dans sa moitié postérieure, et cette moitié, qui est faiblement excavée près de son extrémité postérieure, est presque parallèle à la moitié antérieure du bord supérieur. Le côté pos-

---

* LA JONKAIRE, 1823. *Notice géologique sur les environs d'Anvers,* Tome I, pag. 129, pl. VI, fig. 1 *a, b, c.* (Dans le Tome I des *Mémoires de la Société d'histoire naturelle de Paris*).

térieur est subtriangulaire; il se termine en un bec obtusement pointu, ou en un angle auquel aboutit une arête décurrente, qui part du crochet. La surface des valves offre des stries transversales d'accroissement irrégulières et peu apparentes; dans la moitié inférieure quelques-unes de ces stries deviennent un peu plus distinctes et dans les interstices s'élèvent de très-petits tubercules comprimés, oblongs et irrégulièrement épars. La charnière n'est pas aussi étroite que celle de ma *Syndosmya fragilis* *. Dans la valve droite elle se compose de deux petites dents cardinales subégales, faiblement divergentes et ne laissant entre elles qu'un espace fort petit pour recevoir la dent unique de la valve opposée. La fossette du ligament est assez large; elle est obliquement triangulaire, très-dilatée à la base et s'incline assez fortement dans l'intérieur des valves. Les dents latérales sont longues et étroites; la postérieure est plus courte que l'antérieure. L'impression musculaire antérieure est ovale-allongée subpiriforme, la postérieure est arrondie-subsémilunaire. Le sinus de l'impression palléale est peu distinct dans l'échantillon figuré; il remonte à peu près aux $\frac{2}{5}$ de la longueur totale de la valve.

Dimensions. L'échantillon figuré a 12 m.m. de longueur, sur 6,75 de largeur.

Rapports et différences. Cette espèce a les plus grands rapports avec la *Syndosmya elegans* Desh. † de Jeurre en France. D'après les figures et la description du célèbre Auteur français, cette dernière ne semble différer essentiellement de la nôtre, que par ses valves proportionnellement plus étroites; par le bord supérieur séparé par le crochet en deux moitiés, qui se raccordent sous un angle beaucoup plus ouvert; par le bord inférieur fortement arqué, et surtout par la surface de ses valves couverte de nombreuses stries et de lames transversales; ainsi que par le côté postérieur tout-à-fait couvert de granulations oblongues, qui manquent totalement à la surface du côté antérieur.

Gisement et localités. Cette belle *Syndosmya* est très-rare. Je n'en connais jusqu'ici qu'un seul échantillon entier, qui provient du sable à Pétoncles de Bergh en Belgique. Pendant mes nombreuses recherches dans le sable de cette

---

* J. Bosquet, 1851. *Bulletins de l'Académie royale de Belgique,* Tome XVIII, N°. 9, pag. 305.

† Deshayes, 1857. *Description des animaux sans vertèbres du Bassin de Paris.* Supplément, 8me livraison, pag. 303, pl. XVIbis, fig. 4—6.

localité je n'y ai recueilli, outre l'échantillon figuré, qu'une trentaine de fragments. Dans le sable argileux à Pétoncles de Vliek nous n'avons trouvé pareillement que des fragments, qui y sont associés avec ceux de ma *Syndosmya fragilis*.

Classis III. **FORAMINIFERA.**

Ordo I. AGATHISTEGIA.

22. TRILOCULINA HARTINGI n. sp.

Pl. II, fig. 11, *a—c*.

Coquille ovale-subrhomboïdale, obtusement anguleuse aux extrémités; aplatie d'un côté et très-convexe de l'autre. La loge latérale présente un contour ovale-elliptique; elle est très-convexe et sub-anguleuse au milieu, d'où résulte que la coquille offre une section transversale à contour trigonal. Au côté aplati, la suture est assez profonde et sensiblement sinueuse. La bouche est petite, ovale-elliptique et offre une dent simple et fort courte; elle est un peu oblique et opposée à l'avant-dernière loge. La coquille est blanchâtre, lisse, luisante et assez solide.

Dimensions. Longueur 1,1 m.m.; largeur 0,75 m.m.

Rapports et différences. Quoique cette espèce se rapproche de la *Triloculina consobrina* D'ORB. * par la forme de sa bouche et par sa section transversale à contour subtrigone, elle s'en distingue au premier abord par sa forme générale.

J'ai dédié cette *Triloculina* au Prof. Dr. P. HARTING, auteur d'un ouvrage intéressant, sur la conformation et la répartition géographique et géologique, des Polypiers, des Diatomées et des Foraminifères.

Gisement et localités. Je ne connais jusqu'ici que deux échantillons complets de cette espèce. Ils proviennent de la couche à Pétoncles de l'étage inférieur du système Rupélien à Vliek.

---

* ALC. D'ORBIGNY, 1846. *Foraminifères fossiles du Bassin tertiaire de Vienne*, pag. 277, pl. XVII, fig. 10—12.

23. TRILOCULINA BORNEMANNI n. sp.

Pl. II, fig. 12, *a—c*.

Coquille ovale-elliptique, obtusement anguleuse aux extrémités; très-convexe, et offrant une section transversale à contour arrondi sub-trigone. L'avant-dernière loge présente le long de sa ligne de jonction avec la loge médiane, une partie faiblement proéminente; du côté aplati du test cette même loge offre un contour lancéolé-rhomboïdal. La dernière loge est très-grande et fortement convexe. La bouche, qui est entourée à l'extérieur d'un rebord faiblement proéminent, est fermée en grande partie, par un grosse dent trigone sub-sémicirculaire; d'où résulte que la portion qui reste ouverte, se présente sous forme d'une fente en fer-à-cheval. Les sutures, quoique peu profondes, sont assez bien marquées. La surface du test est lisse et luisante, et présente, (de même que l'espèce précédente) l'aspect de la porcelaine.

Dimensions. Longueur 1,6 m.m., largeur $1\frac{3}{20}$ m.m.

Rapports et différences. Cette espèce, quoique voisine de la *Triloculina inflata* D'ORB. * du terrain Miocène des environs de Vienne, se distingue cependant nettement de celle-ci. Elle en diffère essentiellement: 1°. par ses dimensions plus fortes, 2°. par la grandeur rélative de sa dernière loge, 3°. par sa section transversale à contour trigonal, et 4°. surtout, par la forme et la grandeur de la dent de la bouche. La *Triloculina valvularis* REUSS †, qui se rapproche de mon espèce par la forme de sa dent buccale, s'en éloigne par plusieurs caractères et par sa forme tout-à-fait différente.

J'ai dédié cette espèce au Dr. J. G. BORNEMANN, le savant Auteur de *la Faune microscopique du Septarienthon de Hermsdorf près Berlin.*

Gisement et localités. Cette *Triloculine* semble être fort rare. Elle n'a été recueillie que dans une argile sableuse, appartenant à l'étage supérieur du système Tongrien, au Goudsberg (commune de Hulsberg).

---

* ALC. D'ORBIGNY, 1846. *Foraminifères du Bassin tertiaire de Vienne*, pag. 278, pl. XVII, fig. 13—15.

† REUSS, 1851. *Foraminiferen und Entomostraceen der Septarienthone der Umgegend von Berlin* (in *Zeitschrift der Deutschen geologischen Gesellschaft*, III Band, I Heft, pag. 85, Taf, VII, fig. 56).

VÉGÉTAUX.

Regio. **THALLOPHYTA.**

Sectio. **PROTOPHYTA.**

Classis et Ordo. **CHARACEA.**

24. CHARA SALTERI n. sp.

Pl. II, fig. 13, *a*, *b*.

Cette espèce ne peut, je pense, être confondue avec aucune de ses congénères de l'Epoque tertiaire. Son fruit (la seule partie qui nous est connue), se rapproche un peu de celui de la *Chara helicteres* * Brongn. Il est pourtant bien distinct de celui de cette dernière, tant par sa forme ovale-elliptique, que par ses cinq valves spirales beaucoup plus étroites et formant un nombre de tours plus considérable. On compte 10—11 tours dans notre espèce, tandis qu'il n'y en a que 7—8 dans le fruit de la *Chara helicteres.*

Dimensions. L'échantillon décrit et figuré a $\frac{18}{20}$ de m.m. de longueur, sur une épaisseur de 0,4 m.m.

J'ai dédié cette *Chara* à Mr. J. W. Salter, Paléontologiste au Musée géologique de Londres, qui a décrit plusieurs espèces du genre *Chara,* du terrain tertiaire de l'Angleterre.

Gisement et localités. Je n'ai trouvé jusqu'ici qu'un seul èchantillon du fruit de la *Chara Salteri.* Il a été recueilli dans une couche d'argile-sableuse blanchâtre, appartenant à l'étage supérieur du système tongrien et retirée (à la profondeur d'environ 66 pieds) d'un puits qui a été fait en 1853 à Humkoven, dépendance de la commune d'Ulestraten, dans le Limbourg Neerlandais.

---

* Alc. Brongniart, 1822. *Description géologique des environs de Paris,* pag. 401, pl. X, fig. 8, *a—d.*

EXPLICATION DES PLANCHES.

PLANCHE I.

SERPULA DISTORTA BOSQ., page 4.

Fig. 1. Échantillons de grandeur naturelle, adhérents à la face interne d'un fragment de *Buccinum gossardi* Nyst.
Fig. 2, *a.* Individu fortement grossi, vu en dessus.
b. Trait, indiquant la grandeur naturelle.

GALEOLARIA ACUTIROSTRIS BOSQ., page 4.

Fig. 3, *a.* Fragment, fortement grossi, vu en dessus.
b. Trait, indiquant la grandeur naturelle.

MELANIA CARINATA BOSQ., page 5.

Fig. 4, *a.* Échantillon grossi au quintuple de sa grandeur naturelle, et vu du côté du dos.
b. Le même échantillon, grossi de même et vu du côté de la bouche.
c. Trait, indiquant la grandeur naturelle.

NEMATURA DUNKERI BOSQ., page 5.

Fig. 5, *a.* Échantillon agrandi, vu du côté du dos.
b. Le même, vu du côté opposé.
c. Trait, indiquant la grandeur naturelle,

NEMATURA PUPA NYST. sp., pag. 7.

Fig. 6, *a.* Échantillon grossi au décuple de sa grandeur naturelle, vu du côté du dos.
b. Le même, grossi de même, vu du côté de la bouche.
c. Trait, indiquant la grandeur naturelle.
Fig. 7, *a.* Opercule fortement agrandi, vu du côté externe.
b. Le même, grossi de même et vu du côté interne.

NEMATURA BIDENS BOSQ., page 6.

Fig. 8, *a.* Échantillon fortement agrandi, vu du côté du dos.
b. Le même, grossi de même, vu du côté de la bouche.
c. Trait, indiquant la grandeur naturelle.

RISSOA BEYRICHI BOSQ., page 7.

Fig. 9, *a*. Échantillon fortement grossi, vu du côté du dos.
b. Le même, grossi de même, vu du côté opposé.
c. Trait, indiquant la grandeur naturelle.

PLANORBIS SCHULZIANUS DUNKER., page 8.

Fig. 10, *a*. Échantillon fortement agrandi, vu du côté supérieur.
b. Le même, agrandi de même, vu du côté inférieur.
c. Le même, agrandi de même, vu du côté de la bouche.
d. Trait, indiquant la grandeur naturelle.

SUCCINEA UBAGHSI BOSQ., page 9.

Fig. 11. *a*. Échantillon grossi, vu du côté du dos.
b. Le même, grossi de même et vu du côté opposé.
c. Trait, indiquant la grandeur naturelle.

CYCLOSTOMA FRAGILE BOSQ., page 10.

Fig. 12, *a*. Échantillon un peu restauré, grossi et vu du côté du dos.
b. Le même, grossi de même et vu du côté de la bouche.
c. Trait, indiquant la grandeur naturelle.

PLEUROTOMA HORNESI BOSQ., page 11.

Fig. 13, *a*. Jeune individu grossi au sextuple de sa grandeur naturelle et vu du côté du dos.
b. Le même, grossi de même et vu du côté opposé.
c. Trait, indiquant la grandeur naturelle.

BUCCINUM THIERENSI BOSQ., page 12.

Fig. 14, *a*. Échantillon faiblement grossi, vu dn côté du dos.
b. Le même, vu du côté de la bouche.
c. Trait, indiquant la grandeur naturelle.

ODONTOSTOMA PYRAMIDALE BOSQ., page 14.

Fig. 15, *a*. Échantillon agrandi à l'octuple de sa grandeur naturelle, vu du côté du dos.
b. Le même, agrandi de même, vu du côté de la bouche.
c. Trait, indiquant la grandeur naturelle.

PLANCHE II.

ODONTOSTOMA SEMPERI BOSQ., page 15.

Fig. 1, *a*. Échantillon grossi au décuple de sa grandeur naturelle, vu du côté du dos.
b. Le même, grossi de même, vu du côté de la bouche.
c. Trait, indiquant la grandeur naturelle.

ODONTOSTOMA NYSTI BOSQ., page 16.

Fig. 2, *a*. Échantillon agrandi à l'octuple de sa grandeur naturelle, vu du côté du dos.
b. Le même, grossi de même, vu du côté opposé.
c. Trait, indiquant la grandeur naturelle.

TURBONILLA SANDBERGERI BOSQ., page 16.

Fig. 3, *a*. Echantillon grossi au sextuple de sa grandeur naturelle, vu du côté du dos.
b. Le même, grossi de même, vu du côté de la bouche.
c. Trait, indiquant la grandeur naturelle.

TURBONILLA TURRICULATA BOSQ., page 17.

Fig. 4, *a*. Échantillon grossi à l'octuple de sa grandeur naturelle, vu du côté du dos.
b. Le même, grossi de même, vu du côté de la bouche.
c. Trait, indiquant la grandeur naturelle.

TURBONILLA LAEVISSIMA BOSQ., page 18.

Fig. 5, *a*. Échantillon grossi à l'octuple de sa grandeur naturelle, vu du côté du dos.
b. Le même, grossi de même, vu du côté opposé.
c. Trait, indiquant la grandeur naturelle.

BULLA LAURENTI BOSQ., page 19.

Fig. 6, *a*. Échantillon de ma collection, agrandi, vu du côté du dos.
b. Le même, grossi de même, vu du côté de la bouche.
c. Trait, indiquant la grandeur naturelle.

DENTALIUM SANDBERGERI BOSQ., page 20.

Fig. 7, *a*. Échantillon de ma colleetion, de grandeur naturelle.
b. Le même échantillon grossi au double, vu par le côté latéral.
c. Portion postérieure du même échantillon, grossie au quadruple de sa grandeur naturelle, vue du côté convexe ou du dos, pour montrer la fente.
d. Coupe transversale près de l'extrémité anterieure, grossie.

ASTARTE PSEUDO-OMALII BOSQ., page 21.

Fig. 8, *a.* Échantillon bivalve de la coll. de Mr. THIERENS, grossi et vu en dessus.
b. Trait, indiquant la grandeur naturelle.
Fig. 9, *a.* Valve gauche de ma collection, grossie et vue du côté externe.
b. La même, grossie de même et vue du côté interne.

SYNDOSMYA PAPILLATA BOSQ., page 22.

Fig. 10, *a.* Valve droite de ma collection, vue du côté externe et agrandie.
b. La même valve agrandie de même, et vue du côté interne.
c. Grandeur naturelle de l'échantillon.

TRILOCULINA HARTINGI BOSQ., page 24.

Fig. 11, *a.* Échantillon fortement grossi et vu d'un côté.
b. Le même, grossi de même et vu du côté opposé.
c. Le même, grossi de même et vu par l'extrémité antérieure.

TRILOCULINA BORNEMANNI BOSQ., page 25.

Fig. 12, *a.* Échantillon fortement grossi, vu par le côté.
b. Le même, grossi de même, vu du côté opposé.
c. Le même, grossi de même, vu par l'extrémité antérieure.

CHARA SALTERI BOSQ., page 26.

Fig. 13, *a.* Fruit fortement agrandi, vu de profil.
b. Le même, grossi de même, vu par son extrémité libre.



Lieper & Co impr. Amsterdam

A J Wendel in lap del.



J. Bosquet ad nat. del. Meyer & C° impr. Amsterdam A. J. Wendel in lap. del.

BESCHRIJVING EN AFBEELDING

VAN EENEN

TE POMPEJI OPGEGRAVEN

MENSCHELIJKEN SCHEDEL,

DOOR

W. VROLIK EN *J. VAN DER HOEVEN.*

Uitgegeven door de Koninklijke Akademie van Wetenschappen.



AMSTERDAM,
C. G. VAN DER POST.
1859.

GEDRUKT BIJ W. J. KRÖBER.

BESCHRIJVING EN AFBEELDING

VAN EENEN

TE POMPEJI OPGEGRAVEN

MENSCHELIJKEN SCHEDEL,

DOOR

W. VROLIK* EN *J. VAN DER HOEVEN.

In de gewone vergadering der Natuurkundige Afdeeling van de Koninklijke Akademie van Wetenschappen werd ons opgedragen, om, uit onze vroeger ingediende verslagen, de afbeeldingen toe te lichten, welke de Afdeeling besloot van dezen schedel te doen vervaardigen en in hare werken uit te geven.

Terwijl wij ons van deze lastgeving kwijten, meenen wij te moeten herinneren, dat in de vergadering van den 23sten April des jaars 1858, de Heer VAN DER BOON MESCH, onder vele andere voorwerpen, ter tafel heeft gebragt eenen schedel, op den 11den October des jaars 1857, in tegenwoordigheid van Z. K. H. den Prins van Oranje, te Pompeji opgedolven. Deze schedel gaf, na gehoord verslag van den eersten onzer, in de vergadering van den 23sten Mei, aanleiding tot het besluit, dat aan Z. K. H. vergunning zoude worden gevraagd tot nader onderzoek, beschrijving en afbeelding van dit merkwaardig voorwerp. Deze vergunning werd met groote voorkomendheid en in den ruimsten zin door den Prins gegeven. De verlichte Vorst had de goedheid der Afdeeling te doen schrijven, »dat de schedel ter beschikking van de Akademie bleef, gedurende al den tijd, en tot zoodanig doel als zij zal noodig achten, rekenende Z. K. H. zich hoogst gelukkig, iets tot bevordering der wetenschap te hebben kunnen bijbrengen."

Na deze korte inleiding, welke de herkomst van dit voorwerp aanduidt en

tevens den oorsprong doet kennen onzer beide vroegere, reeds in de *Verslagen en Mededeelingen*, D. VIII, bl. 139 en 214, uitgegeven verslagen, gaan wij, onder verwijzing naar de beide afbeeldingen, tot de beschrijving van den schedel over.

Bij de beschouwing blijkt, dat de schedel volkomen gaaf is, met uitzondering van eene beleediging aan het achterste gedeelte der regter helft van het voorhoofd en van eene breuk aan het regter kroonsgewijze uitsteeksel der onderkaak, beide vermoedelijk bij het opgraven verkregen. In de bovenkaak zijn ter linkerzijde eene onware kies, en ter regterzijde twee ware kiezen (de eerste en tweede) aanwezig. In de onderkaak zijn de twee middelste en de regter buitenste snijtand en de voorste onware maaltand zigtbaar; van vele overige tanden vertoonen zich gave kassen, maar, achterwaarts in de onderkaak, blijken kiezen gedurende het leven uitgevallen of op andere wijze verwijderd te zijn; de tandkassenrand althans is aldaar, vooral aan de linkerzijde, op volledige wijze verdwenen. De tanden zijn volkomen gaaf, met uitzondering welligt van de eerste ware kies der regter helft van de onderkaak, welke eene beginnende carieuse holte vertoont. Deze gaafheid der tanden en de vorm des schedels schijnen voor het vermoeden te pleiten, dat hij is van een' man van middelbaren leeftijd (welligt tusschen veertig tot vijftig jaren).

De algemeene vorm is diegene, welken men aan de kortschedeligen van Retzius (*Brachycephalen*) toekent. Het eigenlijke bekkeneel is zeer gewelfd; voorhoofd en achterhoofd zeer breed; de kruin hoog en gelijkmatig verheven. Ter zijde beschouwd, zoo als Pl. I aantoont, is het niet te ontkennen, dat den schedel een gelukkig ontwikkelde vorm eigen is. Dit gunstig oordeel valt eenigzins weg, als men van boven af of in zoogenaamd vogelperspectief zijne beschouwing voortzet, omdat zich alsdan asymmetrie openbaart, vooral zigtbaar in mindere welving boven, en meerdere welving zijwaarts van de regter helft. Het voorhoofd is regts iets of wat platter dan links. Van achteren en van onderen doet de schedel zich voor, alsof hij van de regter- naar de linkerzijde is verdrongen. Trekt men eene lijn aan de ondervlakte van den schedel, midden door het achterhoofdsgat naar voren door het verhemelte heen, dan snijdt deze lijn niet de ruimte tusschen de beide snijtanden, maar die tusschen den buitensten regter snij- en den hoektand; het ploegbeen, de vleugelsgewijze uitsteeksels van het wiggebeen, en de verhemelte-beenderen zijn eenigzins naar de linkerzijde verwrongen, en de verhemelte-platen staan

niet waterpas. Voorts vertoonen zich ook duidelijke sporen van ziekelijk lijden. Deze zijn blijkbaar in de diepte en in de talrijkheid der vaatkanalen aan de binnenvlakte des bekkeneels, in den gezwollen toestand en in de verdikking van vele aangezigtsbeenderen, vooral van de jukbeenderen, van den tandkassenrand der opperkaakbeenderen en in het drievlakkig aanzien van het kroonsgewijze uitsteeksel der onderkaak. Voorts is ook eenige verdikking der bekkeneelsbeenderen op het gevoel niet wel te miskennen. Ware het vergund den schedel door te zagen, dan zoude het voorzeker gemakkelijker vallen, om zich eenige meerdere zekerheid te verschaffen omtrent de dikte der bekkeneelsbeenderen en het gemis van diploë. De toevallige beleediging intusschen met een scherp snijdend werktuig van het voorhoofd geeft gelegenheid, om aldaar althans dat gemis op te merken. Onderzoekingen, door den eersten onzer in het werk gesteld, en door zijnen zoon geboekt * en afgebeeld, hebben geleerd, hoe dat aanvullen en derhalve verdwijnen van diploë geschiedt. Eene sponsachtige opzwelling gaat vooraf en is derhalve de primaire ziektetoestand, waarop later eene aanvulling volgt der beenmazen van buiten naar binnen, door compacte beenzelfstandigheid.

Gewigtig ook is de opmerking, dat, behalve de beide schubnaden, geen andere naad aan den schedel zigtbaar is; zij zijn zoo volkomen verdwenen, dat alleen een geoefend anatoom hunne plaats zoude weten aan te wijzen. Eindelijk meenen wij met het ziekelijk lijden in verband te moeten brengen de aanmerkelijke zwaarte des schedels, als ook de afplatting en als ware het de indrukking der achterhoofds-geledingsknobbels. De wenkbraauwbogen puilen sterk uit, de glabella daar tusschen is breed, de ruimte tusschen de beide oogkassen groot; daarin echter zien wij geen bewijs van ziekelijk lijden, maar veeleer het eigenaardige van den vorm eens mannelijken schedels.

Als uitkomst onzer beschouwing, besluiten wij, dat de te Pompeji opgegraven schedel lijdt aan die ziekelijke beenverdikking, welke men heden *osteosclerosis* heet, en als uitgang eener voorafgaande osteoporose beschouwt. Het herkennen dezer ziekte in eenen schedel, welke een paar duizend jaren oud kan zijn, is op zich zelf reeds geen onbelangrijk feit. Zoo toch het onderzoek en de naauwkeurige metingen van Retzius voor de oud-Scandinavische schedels en die van Davis en Thurnam voor de oud-Britsche volkstammen geleerd hebben, dat de ligchaamsgrootte der menschen in vroegere tijden

* G. Vrolik. *Specimen anatomico-pathologicum inaugurale de hyperostosi cranii.* Amstelodami 1848.

niet die van den tegenwoordigen tijd overtreft, zoo hetzelfde bevestigd wordt door de Egyptische mummiën, waarvan enkele dagteekenen van het derde duizendtal jaren vóór CHRISTUS' geboorte, en zoo op die wijze, zoowel voor het hooge Noorden, als voor het Zuiden, zich eene bepaalde standvastigheid van vorm en grootte voor het menschelijk geslacht openbaart, is het zeker niet onbelangrijk daarbij te herkennen, dat voor een paar duizend jaren de mensch door dezelfde beenziekten werd aangedaan, welke hem ook nu kwellen.

De vraag blijft, of de ziekelijke gesteldheid, welke wij in dezen schedel bemerken, van dien aard is, dat de grondvorm kan gezegd worden door haar ten eenenmale veranderd te zijn. Wij aarzelen geenszins daarop ontkennend te antwoorden. Die grondvorm toch komt overeen met hetgeen van elders bekend is. Vergelijkt men den schedel, te Pompeji opgegraven, met de afbeeldingen van tegennatuurlijk verdikte schedels, zoo als die in de werken van JADELOT, ILG, WENZEL GRUBER, G. VROLIK en E. HUSCHKE voorkomen, dan ontmoet men in deze alle eene grootere verandering van gedaante, dan hier. In de onlangs uitgegevene verhandeling van HUSCHKE * over dit onderwerp, wordt de meening geopperd, dat de oorsprong van het gebrek moet gezocht worden in eene, in jeugdigen leeftijd ontstane, rachitische verweeking en opzwelling der beenderen, waarop later, door het afzetten van compacte beenzelfstandigheid in de verwijde beenmazen, verharding (*eburnatio rachitica*), volgt. In het eerste tijdperk der ziekte geschieden de misvorming, de vernaauwing der hersenholte en der hersenzenuwgaten, waarvan sommige bijna gesloten zijn, en waaruit een algemeen ziekelijk lijden voortkomt. Van dit alles nu geeft de door ons afgebeelde schedel slechts in geringe mate blijk. Wij zouden derhalve vermoeden, dat hier de ziekte geen gevolg is van een in jeugdigen leeftijd ontstaan rachitisme, maar veeleer van een chronisch lijden, in lateren leeftijd geboren. Hieruit meenen wij te moeten verklaren, dat de vorm zoo weinig leed, en de capaciteit der hersenholte zoo ruim bleef.

Uit dit grootendeels bewaard blijven van den vorm, achten wij ons geregtigd, ook uit een ethnologisch gezigtspunt, enkele beschouwingen aan de bovenstaande toe te voegen.

Het is bekend, dat de zuidelijke streken van Italië oudtijds door verschillende volksstammen bewoond werden, die van pelasgischen oorsprong zijn. Uit Campanië, uit Groot-Griekenland, zijn de weinige schedels afkomstig, die

---

* E. HUSCHKE, *Ueb. craniosclerosis totalis rachitica und verdickte Schädel überhaupt.* Jena 1858. 4°.

tot nog toe als van Griekschen oorsprong werden afgebeeld. Ons zijn slechts twee zoodanige afbeeldingen bekend geworden. De eerste afbeelding is die van eenen bij Nola opgedolven schedel; zij werd in 1820 door Blumenbach in de zesde Decade zijner schedelverzameling in het licht gegeven. De tweede schedel werd in 1854 door Dr. Albert Carus in een graf op vijf voet diepte onder den grond bij het oude Cumae opgedolven, en in 1857 door zijnen beroemden vader C. G. Carus beschreven en afgebeeld *.

De onderzoekingen van Retzius hadden hem reeds in 1847 tot het besluit geleid, dat de Grieksche schedels tot den brachycephalischen typus behooren †. Tot staving van deze meening, beriep zich Retzius op den door Blumenbach afgebeelden schedel, op de beschouwing van een' Griekschen geneesheer uit Corfu, die hem kort te voren had bezocht, en op den schedel van een kind van acht jaren, welke hem door den Zweedschen gezant te Athene was toegezonden. De schedel nu van Pompeji, welken wij afbeelden, is mede duidelijk *brachycephalisch.* Zijne mindere schoonheid en minder regelmatige welving zijn het gevolg van den ziekelijken toestand, waarin hij zich bevindt. Het is te betreuren, dat er nog zoo weinig bouwstoffen voor eene ethnographische craniologie in de verzamelingen voorhanden zijn, bepaaldelijk wat de oude bewoners van Europa betreft. In ons vaderland althans zijn alle ons bekende schedelverzamelingen daaraan arm, terwijl zij voor de bewoners van den Indischen Archipel en voor negervolken dikwerf rijk zijn. In dezen staat van zaken, hebben wij het niet onbelangrijk geacht, dat de schedel, door den Prins van Oranje medegebragt, wierd afgebeeld, al is het ook dat de ziekelijke ontaarding der beenderen iets aan de zuiverheid van den vorm moge ontnomen hebben. Behalve het brachycephalisch kenmerk, ontdekt men in hem een eigenaardig opklimmen in schuinsche rigting van het achterhoofd naar voren en boven, als ook eene vrij hooge kruin. Deze bijzonderheid meenen wij niet onvermeld te mogen laten, omdat de Heer von Heidenstam, de bovenvermelde Zweedsche diplomaat, aan onzen hooggeachten vriend Retzius schreef, dat de hoofden der Grieken in het algemeen hoog en rond zijn. Van boven gezien, vertoont zich de omtrek des schedels

---

* *Ueber altgriechische Schädel aus Gräbern der verschwundenen alten Stadt Cumae in Unter-Italien. Nova Act. Acad. Caesar. Leop. Carol. Natur. curios.* Vol. XXVI, p. 1. Bonnae 1857.

† *Kongl. Vetenskaps Akademiens Forhandlingar för den* 8 *September* 1847, p. 207—211, in het Duitsch vertaald door Dr. Creplin in Muller's *Archiv f. Anat. u. Physiol.* 1848, S. 388 ff.

wigvormig rond, gelijk dit ook door hem bij den schedel van het Grieksche kind werd opgeteekend.

Ten besluite doen wij de afmetingen van dezen schedel volgen:

Lengte van den schedel, genomen van den wortel van den neus tot de uitwendige achterhoofdsbuil.	0,181.
Dwarse doormeting, genomen van den eenen naar den anderen wandbeensknobbel.	0,158.
Breedte van het voorhoofd, genomen van den wortel der buitenste oogkas-uitsteeksels.	0,109.
Breedte van het achterhoofd, genomen van de tepelachtige uitsteeksels.	0,137.
Hoogte van den schedel, genomen van den achterrand van het groot achterhoofdsgat tot aan de kruin des schedels.	0,157.
Breedte tusschen de slaapbeensschubben.	0,155.
Afstand tusschen de jukbeensbogen.	0,140.
Hoogte der oogkas.	0,035.
Breedte der oogkas.	0,041.
Hoogte van de onderkaak achterwaarts van den knokkel tot aan den onderrand, links.	0,070.
regts.	0,065.
Het achterhoofdsgat, hier van geringen omvang, in de dwarste. . . .	0,025.
in de lengte.	0,028.
De kromming van den schedel, van den wortel van den neus tot aan het achterhoofdsgat.	0,401.
De geheele omvang van den schedel, gemeten met een' draad, gespannen boven de wenkbraauwbogen over den bovenrand der slaapbeensschubben en boven het midden van het achterhoofdsbeen.	0,550.



Lith. v. Mayer & C.



Lith. v. Meyer & Cº

OPLOSSING

VAN EEN

STELKUNSTIG PROBLEMA,

BETREKKING HEBBENDE TOT HET

VINDEN VAN DEN GROOTSTEN LAST.

DIE DOOR EENIGE STEUNPUNTEN KAN GEDRAGEN WORDEN.

DOOR

J. BADON GHIJBEN.

Uitgegeven door de Koninklijke Akademie van Wetenschappen.

MET ZES HOUTSNEDEN.

AMSTERDAM,
C. G. VAN DER POST.
1859.

OPLOSSING

VAN EEN

STELKUNSTIG PROBLEMA,

BETREKKING HEBBENDE TOT HET

VINDEN VAN DEN GROOTSTEN LAST,

DIE DOOR EENIGE STEUNPUNTEN KAN GEDRAGEN WORDEN.

DOOR

J. BADON GHIJBEN.

In het VIII Deel van de *Nieuwe Verhandelingen der 1e Klasse van het K. N. Instituut,* heeft de Heer J. P. Delprat eene merkwaardige Verhandeling geleverd over de drukkingen, door eenen last op zijne steunpunten voortgebragt. Het voornaamste deel dier Verhandeling is gewijd aan het bepalen van den grootsten last, waarmede een onbuigbaar horizontaal vlak, dat op eenige steunpunten van bekende draagvermogens rust, in een gegeven punt kan bezwaard worden, zonder het bezwijken van een of meer dier steunpunten te veroorzaken. Brengt men het vinden van dien grootsten last op stelkunstig terrein over, zoo geraakt men eenvoudig tot twee vergelijkingen van den eersten graad, met zoovele onbekenden als er steunpunten zijn. Deze onbekenden moeten echter positieve waarden hebben, zij mogen zekere gegevene grenzen niet te boven gaan, zij moeten eene zoo groot mogelijke som hebben; en al deze beperkende voorwaarden hebben ten gevolge, dat het opsporen van de waarden dier onbekenden een vrij ingewikkeld problema wordt, als is het dan ook dat men slechts met twee eerstemagtsvergelijkingen te doen heeft.

Hoezeer de oplossing van dit problema niets kan toevoegen aan de juistheid en volledigheid, waarmede het genoemde onderwerp door den Heer Delprat is behandeld, is dit onderwerp voorzeker belangrijk genoeg om eene beschouwing daarvan uit verschillende gezigtspunten te regtvaardigen. Uit dien hoofde heb ik gemeend eene bloot stelkunstige oplossing van het bedoelde problema, die geheel onafhankelijk is van het onderwerp dat er aanleiding toe gaf, aan de Akademie te mogen aanbieden; terwijl ik mij dan verder verpligt acht, deze oplossing te laten achtervolgen door eene aanwijzing, hoe al hare deelen eene treffende overeenkomst vertoonen met de beschouwingen, die men uit de evenwigtsleer, tot bepaling van genoemden grootsten last kan afleiden.

§ 1.

Het bedoelde problema luidt als volgt:

Eenige onbekenden x_1, x_2, x_3, x_4, enz. moeten voldoen aan twee vergelijkingen

$$a'_1x_1 + a'_2x_2 + a'_3x_3 + a'_4x_4 + \text{enz.} = 0, \quad \dots\dots\dots \quad (\alpha')$$

$$b'_1x_1 + b'_2x_2 + b'_3x_3 + b'_4x_4 + \text{enz.} = 0, \quad \dots\dots\dots \quad (\beta')$$

waarin de coëfficiënten a'_1, b'_1, a'_2, b'_2, enz. gegevene positieve en negatieve getallen zijn. Men vraagt nu voor deze onbekenden positieve waarden te vinden, waarvan de som zoo groot mogelijk is; onder beding dat deze waarden de grenzen $x_1 = A_1$, $x_2 = A_2$, $x_3 = A_3$, enz., die voor elke onbekende in het bijzonder gegeven zijn, niet mogen overschrijden.

§ 2.

Van de vergelijkingen (α') en (β'), die wij volgens eene bekende schrijfwijze beknopter door $\Sigma(a'x) = 0$ en $\Sigma(b'x) = 0$ kunnen voorstellen, gaan de voorste leden door substitutie der grenswaarden over in $\Sigma(a'A)$ en $\Sigma(b'A)$, welke uitdrukkingen wij al dadelijk mogen aannemen dat geen van beide negatief zijn; en wel omdat men, alvorens de vergelijkingen in behandeling te nemen, al hare termen van teeken kan veranderen.

Mogten de gegevens zoodanig zijn, dat $\Sigma(a'A)$ en $\Sigma(b'A)$ beide nul waren, dan zou men blijkbaar, ter oplossing van het problema, voor elke onbekende hare grenswaarde moeten nemen, en de som dier onbekenden zou dan $\Sigma(A)$ zijn.

Mogten de gegevens zoodanig zijn, dat $\Sigma(a'A)$ of $\Sigma(b'A)$ één van beide

nul waren, dan zou hierdoor de oplossing van het problema zeer vereenvoudigd worden; wij mogen echter zulk een bijzonderen toestand der gegevens niet onmiddellijk aannemen, en onderstellen dus dat $\Sigma(a'A)$ en $\Sigma(b'A)$ beide positief zijn; terwijl wij al dadelijk zullen beginnen met aan te toonen, dat ook bij deze onderstelling de oplossing van ons problema altijd kan teruggebragt worden tot het bijzondere geval, dat $\Sigma(a'A)$ of $\Sigma(b'A)$ een van beide nul zijn.

§ 3.

Stellen wij

$$\frac{\Sigma(a'A)}{\Sigma(b'A)} = \frac{p}{q}, \text{ dat is } \frac{a'_1 A_1 + a'_2 A_2 + a'_3 A_3 + \text{enz.}}{b'_1 A_1 + b'_2 A_2 + b'_3 A_3 + \text{enz.}} = \frac{p}{q},$$

dan zijn p en q bekende positieve getallen, die men des goedvindende beide kleiner dan de eenheid kan nemen. Wij hebben nu blijkbaar

$$(b'_1 p - a'_1 q) A_1 + (b'_2 p - a'_2 q) A_2 + (b'_3 p - a'_3 q) A_3 + \text{enz.} = 0;$$

dat is, zoo wij

$$b'_1 p - a'_1 q = b_1, \; b'_2 p - a'_2 q = b_2, \; b'_3 p - a'_3 q = b_3,$$

enz. stellen,

$$b_1 A_1 + b_2 A_2 + b_3 A_3 + \text{enz.} = 0, \text{ of } \Sigma(bA) = 0.$$

Trekken wij verder de vergelijkingen (α') en (β') van elkander af, na de eerste met q en de tweede met p vermenigvuldigd te hebben, dan komt er

$$(b'_1 p - a'_1 q) x_1 + (b'_2 p - a'_2 q) x_2 + (b'_3 p - a'_3 q) x_3 + \text{enz.} = 0,$$

dat is

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 + \text{enz.} = 0; \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (\beta)$$

en deze vergelijking heeft nu de eigenschap dat de uitdrukking $\Sigma(bA)$, waarin haar voorste lid door substitutie der grenswaarden overgaat, werkelijk nul is. Door dus de vergelijkingen (α') en (β) te gebruiken, komen wij tot het bijzondere geval, in het slot der voorgaande § bedoeld.

Op gelijke wijze als (β), kan men meerdere vergelijkingen uit (α') en (β') afleiden, zooals b. v.

$$(a'_1 p + b'_1 q) x_1 + (a'_2 p + b'_2 q) x_2 + (a'_3 p + b'_3 q) x_3 + \text{enz.} = 0,$$

dat is, indien $a'_1 p + b'_1 q = a_1$, $a'_2 p + b'_2 q = a_2$, $a'_3 p + b'_3 q = a_3$, enz. gesteld wordt,

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + \text{enz.} = 0; \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (\alpha)$$

onder die meerdere vergelijkingen kan er echter geene zijn, die gelijktijdig met (β) de eigenschap heeft, dat haar voorste lid door substitutie der grenswaarden nul wordt. Immers om $\Sigma(aA)$ nul te maken, zou men aan de verhouding der vermenigvuldigers p en q eene andere waarde moeten geven, dan wij er aan gaven om $\Sigma(bA)$ nul te doen worden. Voor deze waarde van $\frac{p}{q}$ wordt dan ook $\Sigma(aA) = \Sigma((a'p + b'q)A) = p\Sigma(a'A) + q\Sigma(b'A)$, en dus $\Sigma(aA)$ positief.

Daar alle waarden van de onbekenden, die aan (α) en (β) voldoen, blijkbaar ook aan (α') en (β') voldoen zullen, kunnen wij in plaats van (α') en (β') de vergelijkingen (α) en (β) gebruiken; zoodat wij nu ons problema op te lossen hebben, alsof de gegevene vergelijkingen waren:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + \text{enz.} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

en

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 + \text{enz.} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\beta)$$

wier coëfficiënten met de gegevene grenzen in zulk een verband staan, dat $\Sigma(aA)$ positief en $\Sigma(bA)$ nul is.

Ter loops zij hier aangemerkt, dat het vervangen van (α') door eene nieuwe vergelijking (α) eigenlijk geheel onnoodig is; en dat wij hier de vergelijking (α) slechts ingevoerd hebben, om eene later aan te wijzen overeenkomst, bevrijd te houden van het gebruik van onderling scheefhoekige coördinaten-assen.

§ 4.

Dewijl de substitutie der grenswaarden het voorste lid van (α) positief maakt, zal men, om aan (α) te voldoen, ten minste ééne onbekende moeten verminderen *, en wel zulk eene onbekende die een positieven coëfficiënt a heeft. Maar dewijl de substitutie der grenswaarden aan (β) voldoet, zal men aan (β) niet kunnen blijven voldoen, zoo men slechts ééne daarin voorkomende onbekende vermindert. Wanneer dus in (β) geene der in (α) voorkomende onbekenden ontbreken, zooals wij vooreerst onderstellen zullen, zal men ten minste twee onbekenden moeten verminderen; en wel twee onbekenden wier coëfficiënten b verschillende teekens hebben.

* Door het verminderen eener onbekende verstaan wij aan die onbekende eene waarde beneden hare grenswaarde te geven; terwijl wij verder het verschil van de waarde der onbekende met hare grenswaarde, haar complement zullen noemen.

§ 5.

Verminderen wij dus twee onbekenden x_r en x_s, wier coëfficiënten in (α) ten minste een van beide positief zijn, en wier coëfficiënten in (β) verschillende teekens hebben, als wanneer $-\frac{b_r}{b_s}$ een positief getal verbeeldt. Nemen wij alzoo, de complementen dezer onbekenden door v_r en v_s voorstellende, $x_r = A_r - v_r$ en $x_s = A_s - v_s$, terwijl wij aan de overige onbekenden hare grenswaarden geven, dan gaat het voorste lid van (α) over in

$$\Sigma(a\,A) - (a_r v_r + a_s v_s) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

terwijl (β) geeft

$$b_r v_r + b_s v_s = 0; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

uit de laatste vergelijking volgt nu onmiddellijk

$$v_r + v_s = v_r \left\{1 - \frac{b_r}{b_s}\right\} = v_s \left\{1 - \frac{b_s}{b_r}\right\},$$

dus

$$v_r = \frac{-b_s}{b_r - b_s}(v_r + v_s),\ v_s = \frac{b_r}{b_r - b_s}(v_r + v_s),$$

en

$$a_r v_r + a_s v_s = \frac{a_s b_r - a_r b_s}{b_r - b_s}(v_r + v_s);$$

stellen wij dus

$$\frac{a_s b_r - a_r b_s}{b_r - b_s} = F(r, s), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

zoo vinden wij onmiddellijk

$$\Sigma(a\,A) - (v_r + v_s)\,F(r, s) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

voor de waarde die het voorste lid van (α) verkrijgt, door eene vermindering der beide onbekenden x_r en x_s, die aan (β) voldoet.

Om aan de vergelijking (α) te voldoen, zou de uitdrukking (4) nul moeten zijn; uit die uitdrukking blijkt dus: ten eerste, dat het verminderen der onbekenden x_r en x_s het voldoen aan (α) zal tegenwerken, indien $F(r, s)$ negatief is; en ten tweede, dat het verminderen der onbekenden x_r en x_s het voldoen aan (α) sterker zal bevorderen, en wel voor kleinere waarden van de som der complementen v_r en v_s zal bevorderen, naargelang $F(r, s)$ eene grootere positieve waarde heeft. Daar nu de som der onbekenden grooter

blijft, naargelang hare complementen kleiner zijn, zal men, om de waarden der onbekenden te vinden, die gelijktijdig aan (α) en (β) voldoen, en wier som zoo groot mogelijk is, de vermindering der onbekenden bij voorkeur moeten aanbrengen in die onbekenden, wier coëfficiënten volgens de formule (3) de grootste waarde voor $F(r, s)$ opleveren.

Men beginne dus met de onbekenden op alle mogelijke wijzen te combineren, voor zoover namelijk hare coëfficiënten in (β) verschillende teekens hebben en in (α) niet beide negatief zijn; voor elk dezer combinatiën berekene men volgens de formule (3) de waarde van $F(r, s)$; en die combinatie, welke de grootste positieve waarde voor $F(r, s)$ oplevert, wijst dan de beide onbekenden aan, die men bij voorkeur verminderen moet.

§ 6.

Laten x_m en x_n de onbekenden zijn, door wier combinatie men voor $F(r, s)$ de grootste positieve waarde $F(m, n)$ heeft gevonden. Om dan te onderzoeken of het verminderen van die beide onbekenden, dat is het substitueren van $x_m = A_m - v_m$ en $x_n = A_n - v_n$, toereikend is om aan (α) en (β) te kunnen voldoen, merke men op dat deze substitutie blijkens (2) en (4) de vergelijkingen (α) en (β) doet overgaan in

$$b_m v_m + b_n v_n = 0 \quad \text{en} \quad \Sigma(a\,A) - (v_m + v_n)\,F(m, n) = 0,$$

waaruit voor de waarden der complementen v_m en v_n gevonden wordt

$$v_m = \frac{\Sigma(a\,A)}{\left\{1 - \frac{b_m}{b_n}\right\} F(m, n)} \quad \text{en} \quad v_n = \frac{\Sigma(a\,A)}{\left\{1 - \frac{b_n}{b_m}\right\} F(m, n)};$$

overschrijden nu deze waarden de grenzen A_m en A_n niet, dan is de vermindering der onbekenden x_m en x_n toereikend om aan (α) en (β) te voldoen, zoodat ons problema dan zal opgelost zijn, door te nemen

$$x_m = A_m - \frac{\Sigma(a\,A)}{\left\{1 - \frac{b_m}{b_n}\right\} F(m, n)}, \quad x_n = A_n - \frac{\Sigma(a\,A)}{\left\{1 - \frac{b_n}{b_m}\right\} F(m, n)},$$

en aan al de overige onbekenden hare grenswaarden te geven.

Is echter

$$\frac{\Sigma(a\,A)}{\left\{1 - \frac{b_m}{b_n}\right\} F(m, n)} > A_m \quad \text{of} \quad \frac{\Sigma(a\,A)}{\left\{1 - \frac{b_n}{b_m}\right\} F(m, n)} > A_n,$$

dan is het verminderen der onbekenden x_m en x_n ontoereikend, zoodat men dan tot eene vermindering van nog een of meer andere onbekenden zal moeten overgaan.

§ 7.

Het overgaan tot vermindering eener derde onbekende, kan eerst dan te pas komen, wanneer ten minste een van de beide onbekenden x_m of x_n tot nul verminderd en dus haar complement gelijk aan hare grenswaarde genomen is; want zoolang dit niet heeft plaats gehad, blijven de onbekenden x_m en x_n altijd diegenen, waarop de vermindering bij voorkeur moet toegepast worden. Ingeval dus, zooals wij nu verder onderstellen zullen, de vermindering der onbekenden x_m en x_n ontoereikend is, komt het er op aan te onderzoeken, wie van deze beide het is, die tot nul verminderd moet worden, en welke vermindering van de andere daarmede moet gepaard gaan. Dit onderzoek levert eene uitkomst op, die afhankelijk is van den positieven of negatieven toestand der uitdrukking $b_m A_m + b_n A_n$, in verband met de verschillende teekens der coëfficiënten b_m en b_n.

Zijn de gegevene coëfficiënten en grenswaarden zoodanig, dat $b_m A_m + b_n A_n = 0$ is, zoo verhindert niets, dat men x_m en x_n beide tot nul verminderе; want hierdoor wordt $v_m = A_m$, $v_n = A_n$, en deze waarden voldoen dan aan de vergelijking $b_m v_m + b_n v_n = 0$.

Is echter $b_m A_m + b_n A_n$ niet gelijk nul, zoo kan men slechts één van de beide onbekenden x_m of x_n tot nul verminderen. Stel dat x_m tot nul verminderd en dus $v_m = A_m$ genomen kan worden, zoo zal uit de vergelijking $b_m v_m + b_n v_n = 0$ volgen, dat men $v_n = -\frac{b_m}{b_n} A_m$ moet nemen. Maar deze waarde van v_n mag de grens A_n niet overschrijden; derhalve mag $A_n - \left(-\frac{b_m}{b_n} A_m\right)$ of wel $\frac{b_m A_m + b_n A_n}{b_n}$ niet negatief zijn; dat is $b_m A_m + b_n A_n$ moet hetzelfde teeken hebben als b_n. Stelt men dat x_n tot nul verminderd kan worden, zoo volgt daaruit desgelijks dat $b_m A_m + b_n A_n$ hetzelfde teeken als b_m moet hebben. Naargelang dus $b_m A_m + b_n A_n$ in teeken overeenkomt met b_n of b_m, zal men x_m of x_n tot nul moeten verminderen.

Alzoo moet men dan beginnen met x_m en x_n te verminderen tot:

$x_m = 0$, en $x_n = 0$, als $b_m A_m + b_n A_n = 0$ is;

$x_m = 0$ $x_n = \frac{b_m A_m + b_n A_n}{b_n}$, als $\frac{b_m A_m + b_n A_n}{b_n}$ positief is;

$x_m = \frac{b_m A_m + b_n A_n}{b_m}$, $x_n = 0$, als $\frac{b_m A_m + b_n A_n}{b_m}$ positief is.

§ 8.

Na deze eerste vermindering zal men dan verder, op gelijke wijze als dit ten aanzien van x_m en x_n verklaard is, eene tweede vermindering moeten aanbrengen in twee zoodanige onbekenden x_p en x_q, als wier combinatie, zonder eene reeds tot nul verminderde onbekende te bevatten, door het gebruik der formule (3) de positieve waarde $F(p,q)$ heeft opgeleverd, die in grootte het naast bij $F(m,n)$ komt. En bij deze tweede vermindering, zal men de overgeblevene waarden der nog niet tot nul reeds verminderde onbekenden, als hare nieuwe grenswaarden moeten beschouwen.

Of zulk eene tweede vermindering toereikend zal kunnen zijn, blijkt even als in § 6. Is zij toereikend, dan is de oplossing van het problema ten einde. Is zij echter ontoereikend, dan moet zij even als in § 7 zoo ver worden uitgestrekt, dat ten minste één der onbekenden x_p of x_q tot nul verminderd worde. Hierna zal men wederom eene derde vermindering moeten toepassen op de twee onbekenden, wier combinatie, volgens de formule (3) de grootste positieve waarde na $F(p,q)$ opleverde, zonder eene reeds tot nul verminderde onbekende te bevatten. En zoo vervolgens.

Door deze achtervolgende paarsgewijze verminderingen, blijft men dan steeds aan de vergelijking (β) voldoen, terwijl men de aanvankelijk positieve waarde $\Sigma(aA)$ van het voorste lid der vergelijking (α), ten koste van de kleinste verminderingen der onbekenden het spoedigst laat afnemen, tot dat ook aan de vergelijking (α) voldaan is.

§ 9.

Bij het berekenen der waarden van $F(r,s)$, voor alle bruikbare combinatiën der onbekenden, zal zich de merkwaardige bijzonderheid voordoen, dat de beide combinatiën, die de grootste en de naastgrootere waarde voor $F(r,s)$ opleveren, altijd eene zelfde onbekende bevatten. Dit kan op de volgende wijze worden aangetoond.

Laat in (β) b_m de positieve en b_n de negatieve coëfficiënt zijn van twee gecombineerde onbekenden x_m en x_n; zij evenzoo b_p de positieve en b_q de negatieve coëfficiënt van twee andere gecombineerde onbekenden x_p en x_q; dan zal men van deze vier onbekenden ook nog x_m met x_q, en x_n met x_p kunnen combineren, omdat hare coëfficiënten b verschillende teekens hebben; terwijl, wegens de overeenkomst van de teekens der coëfficiënten b, de combinatiën van x_m met x_p, en van x_n met x_q, moeten vervallen. Stellen wij nu gemakshalve

$$-\frac{b_m}{b_n} = h\,,\ -\frac{b_p}{b_q} = i\,,\ -\frac{b_m}{b_q} = k \text{ en } -\frac{b_p}{b_n} = l\,,$$

als wanneer h, i, k en l positieve getallen zijn, die zóó van elkander afhangen, dat $\frac{k}{i} = \frac{h}{l}$ is, dan leveren de vier bruikbare combinatiën der onbekenden de volgende waarden op:

$$F(m,n) = \frac{a_m + a_n h}{1+h}\,,\quad F(p,q) = \frac{a_p + a_q i}{1+i}\,,\quad F(m,q) = \frac{a_m + a_q k}{1+k}\,,\quad F(p,n) = \frac{a_p + a_n l}{1+l}\,;$$

en wij hebben nu te bewijzen dat, indien van deze vier waarden $F(m, n)$ de grootste is, $F(p, q)$ niet de naastgrootere kan zijn, maar wel $F(m, q)$ of $F(p, n)$.

Stellen wij daartoe

$$F(m,n) > F(p,q) \quad \text{en} \quad F(m,q) < F(p,q)\,,$$

dat is

$$\frac{a_m + a_n h}{1+h} > \frac{a_p + a_q i}{1+i} \quad \text{en} \quad \frac{a_m + a_q k}{1+k} < \frac{a_p + a_q i}{1+i}\,,$$

dan volgt hieruit onmiddellijk

$$(a_m + a_n h)(1+i) > (a_p + a_q i)(1+h)\,,$$
$$(a_m + a_q k)(1+i) < (a_p + a_q i)(1+k)\,,$$

en dus door aftrekking

$$(a_n h - a_q k)(1+i) > (a_p + a_q i)(h-k)\,;$$

hieruit leiden wij dan verder af: door ontwikkeling, weglating van gelijke en verplaatsing van andere termen,

$$a_p k + a_n h + a_n h i > a_p h + a_q k + a_q h i\,;$$

door vermenigvuldiging met $\frac{i}{k} = \frac{l}{h}$,

$$a_p i + a_n l + a_n i l > a_p l + a_q i + a_q l i\,;$$

door optelling van a_p bij elk der leden,

$$(a_p + a_n l)(1 + i) > (a_p + a_q i)(1 + l);$$

en hiervoor kunnen wij nu schrijven

$$\frac{a_p + a_n l}{1 + l} > \frac{a_p + a_q i}{1 + i},$$

of wel

$$F(p, n) > F(p, q).$$

Hadden wij gesteld

$$F(m, n) > F(p, q) \quad \text{en} \quad F(p, n) < F(p, q),$$

dan zouden wij daaruit op gelijke wijze hebben afgeleid

$$F(m, q) > F(p, q).$$

Indien dus $F(m, n)$ grooter dan $F(p, q)$ is, kunnen $F(p, n)$ en $F(m, q)$ niet gelijktijdig kleiner dan $F(p, q)$ zijn. Is derhalve $F(m, n)$ de grootste der vier genoemde waarden, zoo kan geenszins $F(p, q)$ maar wel $F(p, n)$ of $F(m, q)$ de naastgrootere zijn.

§ 10.

Uit de aangetoonde eigenschap kan afgeleid worden, hoe de opvolgende verminderingen zich aaneen zullen schakelen.

Laat namelijk

$$F(m, n), \quad F(p, n), \quad F(p, q), \quad F(m, q),$$

de orde van afdaling zijn, der vier grootste positieve waarden, die men door de bruikbare combinatiën der onbekenden gevonden heeft. Indien dan de eerste vermindering tot $x_m = A_m - v_m$ en $x_n = 0$ is moeten uitgestrekt worden, zal de tweede vermindering over de twee nieuwe onbekenden x_p en x_q loopen, zonder zich over het overgebleven deel van x_m te kunnen uitstrekken. Heeft men echter de eerste vermindering tot $x_m = 0$ en $x_n = A_n - v_n$ moeten uitstrekken, dan zal de tweede vermindering slechts over éene nieuwe onbekende x_p, maar tevens over het overgeblevene deel der onbekende x_n loopen.

Was echter de orde van afdaling eene der beide volgende:

$$F(m, n), \quad F(p, n), \quad F(m, q), \quad F(p, q);$$

$$F(m, n), \quad F(m, q), \quad F(p, n), \quad F(p, q);$$

dan zou de onbekende, die bij de eerste vermindering niet tot nul verminderd werd, altijd andermaal in de tweede vermindering begrepen zijn. Hieruit volgt echter nog niet, dat deze onbekende door de tweede vermindering tot nul zou moeten gebragt worden. Zij zou een deel kunnen laten overblijven, dat andermaal in eene derde vermindering kan begrepen zijn, maar ook wel buiten die derde vermindering zou kunnen blijven.

§ 11.

Er zijn twee bijzondere gevallen, waarin het aanbrengen der verminderingen, telkens in een tweetal onbekenden, moet vervallen. Het eene geval kan zich voordoen, wanneer in (β) eene onbekende ontbreekt, die in (α) eenen positieven coëfficiënt heeft. Het andere doet zich voor, wanneer de grootste positieve waarde, die de formule (3) voor $F(r, s)$ oplevert, gelijkelijk uit twee of meer combinatiën voortvloeit. De eene onderstelling hebben wij uitdrukkelijk, de andere hebben wij stilzwijgend, tot dusverre buitengesloten.

Onderstellen wij thans dat in (β) eene onbekende x_l ontbreekt, die in (α) een positieven coëfficiënt a_l heeft. Indien wij dan deze onbekende verminderen, en dus, die vermindering of het complement door v_l voorstellende, $x_l = A_l - v_l$ nemen, terwijl wij aan de overige onbekenden hare grenswaarden geven, is aan (β) voldaan en gaat het voorste lid van (α) over in

$$\Sigma(a\,A) - v_l \times a_l; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

hieruit zien wij terstond, dat het verminderen van x_l meer tot het voldoen aan (α) bijdraagt, naargelang de coëfficiënt a_l grooter is; en door de uitdrukking (5) met de uitdrukking (4) van § 5 te vergelijken, zien wij almede, dat voor gelijke waarden van v_l en $v_r + v_s$, dat is voor gelijke vermindering in de som der onbekenden, het voldoen aan (α) al of niet sterker door de vermindering van x_l dan door die van x_r en x_s zal bevorderd worden, naargelang de coëfficiënt a_l al of niet grooter dan de waarde van $F(r, s)$ is. Wanneer dus $F(m, n)$ de grootste positieve waarde is, die men voor $F(r, s)$ kan bekomen, zal men, indien $a_l < F(m, n)$ is, even als vroeger met het verminderen der onbekenden x_m en x_n moeten beginnen.

Is echter $a_l > F(m, n)$, dan zal men aanvankelijk x_l moeten verminderen, en kunnen onderzoeken of die vermindering welligt alleen toereikend is, door de uitdrukking (5) gelijk nul te stellen, en te zien of de daaruit voortvloei-

jende waarde $v_l = \frac{\Sigma(a\text{A})}{a_l}$ de grens A_l niet overschrijdt. Overschrijdt zij die grens niet, dan zal het problema opgelost zijn, zoo men $x_l = \text{A}_l - \frac{\Sigma(a\text{A})}{a_l}$ neemt, en aan al de andere onbekenden hare grenswaarden geeft. Is echter $\frac{\Sigma(\text{A}\,a)}{a_l} > \text{A}_l$, dan zal men eerst $x_l = 0$ moeten nemen en daarna tot de vroeger verklaarde vermindering van x_m en x_n moeten overgaan.

Het is voorts klaar, dat de vermindering van x_l ook tusschen de paarsgewijze verminderingen der onbekenden zal moeten aangebragt worden, zoodra de afdalende waarden van $\text{F}(r, s)$, die men opvolgend gebruikt, beneden de waarde van den coëfficiënt a_l zouden komen. Alsmede dat, zoo er meer onbekenden in (β) ontbreken, hare verminderingen in vroeger of later plaats in aanmerking zullen moeten komen, naargelang hare positieve coëfficiënten in (α) grooter zijn.

§ 12.

Onderstellen wij nu nog, dat de grootste positieve waarde, die de formule (3) voor $\text{F}(r, s)$ oplevert, gelijkelijk uit twee combinatiën van onbekenden voortvloeit, dan moeten, volgens het betoogde in § 9, deze twee combinatiën ieder eene zelfde onbekende bevatten. Nemen wij diensvolgens aan, dat de combinatiën van x_m met x_n, en van x_m met x_p, de onderling gelijke grootste positieve waarden

$$\frac{a_n b_m - a_m b_n}{b_m - b_n} = \frac{a_p b_m - a_m b_p}{b_m - b_p} = \text{F}(m, n) = \text{F}(m, p) = f$$

hebben opgeleverd, dan moeten volgens § 5 de verminderingen wel bij voorkeur aangebragt worden in de onbekenden die tot deze combinatiën behooren, maar deze drie onbekenden x_m, x_n en x_p deelen met hetzelfde regt in die voorkeur. Vermindert men die dus alle drie en stelt men alzoo $x_m = \text{A}_m - v_m$, $x_n = \text{A}_n - v_n$, $x_p = \text{A}_p - v_p$, dan gaat het voorste lid van (α) over in

$$\Sigma(a\text{A}) - (a_m v_m + a_n v_n + a_p v_p)\,, \qquad (6)$$

terwijl uit (β) volgt

$$b_m v_m + b_n v_n + b_p v_p = 0\,; \qquad (7)$$

de laatste vergelijking geeft

$$v_m = -\frac{b_n}{b_m} v_n - \frac{b_p}{b_m} v_p\,,$$

waardoor wij hebben

$$a_m v_m + a_n v_n + a_p v_p = -\frac{a_m b_n}{b_m} v_n - \frac{a_m b_p}{b_m} v_p + a_n v_n + a_p v_p =$$

$$= \frac{a_n b_m - a_m b_n}{b_m} v_n + \frac{a_p b_m - a_m b_p}{b_m} v_p = \frac{f(b_m - b_n)}{b_m} v_n + \frac{f(b_m - b_p)}{b_m} v_p =$$

$$= f\left(v_n + v_p - \frac{b_n}{b_m} v_n - \frac{b_p}{b_m} v_p\right) = f(v_m + v_n + v_p);$$

voor de uitdrukking (6), waarin het voorste lid van (α) door vermindering der drie onbekenden overgaat, kunnen wij dus almede schrijven

$$\Sigma\,(a\,A) - (v_m + v_n + v_p) f \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Volgens eene bekende methode * kan men voor v_m, v_n en v_p positieve waarden vinden, die aan de vergelijking (7) voldoen, respectievelijk de grenzen A_m, A_n en A_p niet overschrijden, en eene zoo groot mogelijke som hebben. Noemen wij deze waarden M, N en P, dan is $b_m M + b_n N + b_p P = 0$, $M <$ of $= A_m$, $N <$ of $= A_n$, $P <$ of $= A_p$, en $M + N + P$ de genoemde grootstmogelijke som, terwijl er onder de drie waarden M, N en P zeker eén of welligt twee de grenswaarde hebben. Is nu deze som grooter dan $\frac{\Sigma\,(a\,A)}{f}$, zoo zal het problema kunnen opgelost worden, door alleen de onbekenden x_m, x_n en x_p te verminderen. Hiertoe heeft men namelijk niet alleen de vergelijking (7), maar zal men blijkens (8) ook moeten hebben

$$\Sigma\,(a\,A) - (v_m + v_n + v_p) f = 0; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

zoo dat dan (7) en (9) de twee, maar ook de twee eenige vergelijkingen zijn, waaraan de drie complementen v_m, v_n en v_p moeten voldoen. Daar nu uit $M + N + P > \frac{\Sigma\,(a\,A)}{f}$ volgt, dat men, door M, N en P in eene zelfde reden tot M', N' en P' te verkleinen, maken kan dat $M' + N' + P' = \frac{\Sigma\,(a\,A)}{f}$ wordt, als wanneer men heeft $\Sigma\,(a\,A) - (M' + N' + P') f = 0$; terwijl die evenredige verkleining de vergelijking $b_m M + b_n N + b_p P = 0$ doet overgaan in $b_m M' + b_n N' + b_p P' = 0$; zoo is het klaar dat men slechts $v_m = M'$, $v_n = N'$ en $v_p = P'$ behoeft te nemen, om voor de complementen waarden

* Zie mijne *Beginselen der Diff. en Int. Rekening*, § 201.

te bekomen, die, zonder de grenswaarden te overschrijden, aan de vergelijkingen (7) en (9), dat is aan (α) en (β), voldoen.

De genoemde evenredige verkleining, die wij aanvoerden om in het ondersteld geval het toereikende van de vermindering der drie onbekenden x_m, x_n, en x_p aan te toonen, geeft slechts één der vele antwoorden die men hier bekomen kan. Immers daar men in (7) en (9) slechts twee vergelijkingen ter bepaling der drie complementen heeft, kan men voor een dier complementen eene zekere waarde aannemen en er vervolgens de beide anderen uit bepalen; men zal slechts moeten zorgen die aan te nemen waarde zóó beneden hare grens te kiezen, dat ook de beide anderen beneden hare grenzen blijven.

Na alzoo voldoende waarden voor de complementen v_m, v_n en v_p gevonden te hebben, behoeft men dan slechts $x_m = A_m - v_m$, $x_n = A_n - v_n$ en $x_p = A_p - v_p$ te nemen, en aan al de overige onbekenden hare grenswaarden te geven, om de oplossing van het problema te verkrijgen, dat nu blijkbaar, ten aanzien van de waarden, die men voor de onbekenden x_m, x_n en x_p ieder in het bijzonder vindt, onbepaald — maar ten aanzien van de som, die men voor de onbekenden bekomt, bepaald is.

Mogt $M + N + P$ juist gelijk aan $\frac{\Sigma (a A)}{f}$ zijn, dan zou men $v_m = M$, $v_n = N$ en $v_p = P$ kunnen nemen, waardoor nog juist aan de vergelijkingen (7) en (9) voldaan wordt. Hierdoor verkrijgt men dan de eenige bepaalde waarden $x_m = A_m - M$, $x_n = A_n - N$ en $x_p = A_p - P$, die nevens de grenswaarden der overige onbekenden het problema oplossen. Waren in dit geval de gegevens zoodanig dat men had $b_m A_m + b_n A_n + b_p A_p = 0$, dan zou $M = A_m$, $N = A_n$ en $P = A_p$ zijn, zoodat men dan, nevens de grenswaarden der overige onbekenden, hebben zou $x_m = 0$, $x_n = 0$ en $x_p = 0$.

Is echter de grootstmogelijke som $M + N + P$ kleiner dan $\frac{\Sigma (a A)}{f}$, zoo is de vermindering der drie onbekenden x_m, x_n en x_p ontoereikend ter oplossing van het problema. Want alsnu kunnen er, onder de waarden van v_m, v_n en v_p, die zonder hare grenzen te overschrijden aan de vergelijking (7) voldoen, geene aangewezen worden, die den term $(v_m + v_n + v_p) f$ groot genoeg maken om de uitdrukking (8) nul te doen worden en alzoo aan de vergelijking (α) te voldoen. In dit geval zal men dus de vermindering der onbekenden x_m, x_n en x_p zoo ver mogelijk moeten uitstrekken, alvorens tot

vermindering van nieuwe onbekenden over te gaan. Hiertoe zal men $x_m = A_m - M$, $x_n = A_n - N$ en $x_p = A_p - P$ moeten nemen, waardoor een of welligt twee der drie onbekenden tot nul verminderd worden en er zeker geene waarden overblijven, voor twee wier coëfficiënten b in teeken verschillen *. Daarna zal men dan verder tot het verminderen van nieuwe onbekenden, door de opvolgende grootste positieve waarde van $F(r, s)$ aangewezen, moeten overgaan.

§ 13.

Heeft men de aanvankelijke grootste positieve waarde voor $F(r, s)$ uit meer dan twee combinatiën gevonden, dan zullen deze combinatiën over meer dan drie onbekenden loopen, maar blijkens § 9 altijd twee aan twee eene zelfde onbekende bevatten.

Stellen wij nu b. v. dat die combinatiën over de vijf onbekenden x_m, x_n, x_p, x_q, x_t loopen, dan verkrijgen wij, even als in de vorige § te werk gaande, de vergelijking

$$b_m v_m + b_n v_n + b_p v_p + b_q v_q + b_t v_t = 0, \ldots \ldots (7')$$

en de uitdrukking

$$\Sigma(a\,A) - (v_m + v_n + v_p + v_q + v_t) f, \ldots \ldots (8')$$

die voor het geval dat de vermindering dezer vijf onbekenden toereikend is, de vergelijking

$$\Sigma(a\,A) - (v_m + v_n + v_p + v_q + v_t) f = 0 \ldots \ldots (9')$$

oplevert. Al dezelfde beschouwingen, die in de vorige § ten aanzien van (7), (8) en (9) voorkomen, laten zich nu onmiddellijk op (7'), (8') en (9') toepassen, om te onderzoeken of en hoe het problema kan opgelost worden, hetzij alleen door onbepaalde of bepaalde verminderingen dezer vijf onbekenden, hetzij door hare zoo ver mogelijk uitgestrekte verminderingen, nog door verminderingen van andere onbekenden te doen achtervolgen.

Overigens is het klaar, dat het aanbrengen der verminderingen, in deze en in de vorige § besproken, zich niet aanvankelijk behoeft voor te doen, maar ook tusschen de vroeger beschouwde paarsgewijze verminderingen kan invallen; gelijk mede tusschen deze, en de enkele verminderingen, waarvan in § 11 sprake was. Gelijkerwijze als wij dit, aan het slot van § 11, ten aanzien van die enkele verminderingen opmerkten.

---

* Dit volgt uit de toepassing der aangehaalde methode.

§ 14.

Daar het tot dusver voorgedragene genoegzaam is, om het voorgestelde problema in alle gevallen te kunnen oplossen, zullen wij thans die oplossing door een enkel voorbeeld ophelderen, dat nagenoeg al de opgemerkte bijzonderheden zal doen te voorschijn treden.

Laten te dien einde de gegevene vergelijkingen zijn:

$$19x_1 + 5x_2 + 13x_3 + 8x_4 + 20x_5 + 22x_6 - 6x_7 + 10x_8 = 0, \;..\; (\alpha')$$

$$x_1 + 20x_2 - 47x_3 - 40x_4 - 40x_5 - 74x_6 - 24x_7 - 71x_8 = 0, \;..\; (\beta')$$

en nemen wij als gegevene grenswaarden der onbekenden respectievelijk aan:

$$A_1 = 6,\ A_2 = 18,\ A_3 = 3,\ A_4 = 2\tfrac{1}{2},\ A_5 = 5,\ A_6 = 2,\ A_7 = 15,\ A_8 = 1;$$

indien wij dan deze grenswaarden voor de onbekenden substitueren, komt er voor de voorste leden dezer vergelijkingen $\Sigma(a'A) = 327$ en $\Sigma(b'A) = -654$. Na de teekens van (β') omgekeerd te hebben, vinden wij dus

$$\frac{p}{q} = \frac{\Sigma(a'A)}{\Sigma(b'A)} = \frac{327}{654} = \frac{1}{2}\ ,\ \text{dat is } p = 1 \text{ en } q = 2;$$

wij voegen alzoo het dubbel van (α') met (β') te zamen, als wanneer wij, na deeling door 3, de nieuwe vergelijking

$$13x_1 + 10x_2 - 7x_3 - 8x_4 - 10x_6 - 12x_7 - 17x_8 = 0$$

verkrijgen, die nu de eigenschap heeft, dat haar voorste lid door substitutie der grenswaarden nul wordt. Deze vergelijking ter vervanging van (β') gebruikende, hebben wij niet noodig ook nog (α') door eene nieuwe vergelijking te vervangen; en wij zullen ons alzoo bedienen van de vergelijkingen:

$$19x_1 + 5x_2 + 13x_3 + 8x_4 + 20x_5 + 22x_6 - 6x_7 + 10x_8 = 0, \;...\; (\alpha)$$

en

$$13x_1 + 10x_2 - 7x_3 - 8x_4 \;.....\; - 10x_6 - 12x_7 - 17x_8 = 0, \;...\; (\beta)$$

volgens welke $\Sigma(aA) = 327$ en $\Sigma(bA) = 0$ is.

Combineeren wij nu de onbekenden, zooals aan het slot van § 5 gezegd is, ter berekening der waarden van $F(r, s)$ volgens de formule (3), dan vinden wij:

$$F(1,3) = 15\tfrac{1}{10},\ F(1,4) = 12\tfrac{4}{21},\ F(1,6) = 20\tfrac{16}{23},\ F(1,7) = 6,\ F(1,8) = 15\tfrac{1}{10},$$

$$F(2,3) = 9\tfrac{12}{17},\ F(2,4) = 6\tfrac{2}{3},\ F(2,6) = 13\tfrac{1}{2},\ F(2,7) = 0,\ F(2,8) = 6\tfrac{23}{27},$$

en wij hebben dus deze waarden naar hare afdalende grootte te rangschikken. Dewijl in (β) eene onbekende x_5 ontbreekt, die in (α) een positieven coëfficiënt heeft, moet bij deze rangschikking aan dien coëfficiënt zijne plaats gegeven worden. Hierdoor hebben wij de afdalende waarden:

$F(1,6) = 20\frac{16}{23}$, $a_5 = 20$, $F(1,3) = F(1,8) = 15\frac{1}{10}$, $F(2,6) = 13\frac{1}{2}$, $F(1,4) = 12\frac{4}{21}$, enz.

die dan aanwijzen in welke volgorde de onbekenden bij voorkeur ter vermindering in aanmerking moeten komen; te weten aanvankelijk x_1 en x_6.

Wij beginnen dus met $x_1 = 6 - v_1$ en $x_6 = 2 - v_6$ te stellen, waardoor (α) en (β) overgaan in

$$327 - (19\,v_1 + 22\,v_6) = 0 \quad \text{en} \quad -13\,v_1 + 10\,v_6 = 0;$$

hieruit v_1 en v_6 berekenende, vinden wij waarden die de grenzen 6 en 2 te boven gaan, waardoor blijkt, dat het verminderen van x_1 en x_6 ontoereikend is, en dus een dezer onbekenden tot nul verminderd moet worden. Omdat $\frac{b_1\,A_1 + b_6\,A_6}{b_1} = \frac{13 \times 6 - 10 \times 2}{13}$ positief is, is het x_6 die tot nul verminderd moet worden, waarmede overeenstemt $v_6 = 2$, $v_1 = \frac{10}{13}\,v_6 = 1\frac{7}{13}$ en $x_1 = 6 - v_1 = 4\frac{6}{13}$; zoodat x_1 aanvankelijk tot $4\frac{6}{13}$ moet verminderd worden en bijgevolg $A_1 = 4\frac{6}{13}$ eene nieuwe grenswaarde voor x_1 wordt. Alzoo behouden wij de vergelijkingen:

$$19\,x_1 + 5\,x_2 + 13\,x_3 + 8\,x_4 + 20\,x_5 - 6\,x_7 + 10\,x_8 = 0, \quad \ldots \quad (\alpha_1)$$

$$13\,x_1 + 10\,x_2 - 7\,x_3 - 8\,x_4 \; \ldots\ldots \; - 12\,x_7 - 17\,x_8 = 0, \quad \ldots \quad (\beta_1)$$

met de grenswaarden $A_1 = 4\frac{6}{13}$, $A_2 = 18$, $A_3 = 3$, $A_4 = 2\frac{1}{2}$, $A_5 = 5$, $A_7 = 15$ en $A_8 = 1$, volgens welke nu $\Sigma\,(a\,A) = 253\frac{10}{13}$ wordt.

Verder komt nu, volgens § 11, de onbekende, die tot den coëfficiënt $a_5 = 20$ behoort, ter vermindering in aanmerking, en wij stellen diensvolgens $x_5 = 5 - v_5$, waardoor (β_1) onveranderd blijft, terwijl (α_1) geeft

$$253\tfrac{10}{13} - 20\,v_5 = 0;$$

de waarde, die hieruit voor v_5 gevonden zou worden, gaat wederom de grenswaarde 5 te boven; alzoo moet $v_5 = 5$ en $x_5 = 0$ genomen worden, waardoor wij behouden de vergelijkingen:

$$19\,x_1 + 5\,x_2 + 13\,x_3 + 8\,x_4 - 6\,x_7 + 10\,x_8 = 0, \quad \ldots\ldots \quad (\alpha_2)$$

$$13\,x_1 + 10\,x_2 - 7\,x_3 - 8\,x_4 - 12\,x_7 - 17\,x_8 = 0, \quad \ldots\ldots \quad (\beta_2)$$

met de grenswaarden $A_1 = 4\frac{6}{13}$, $A_2 = 18$, $A_3 = 3$, $A_4 = 2\frac{1}{2}$, $A_7 = 15$ en $A_8 = 1$, volgens welke thans $\Sigma\,(A\,a) = 155\frac{10}{13}$ is.

Daar op den gebruikten coëfficiënt $a_5 = 20$, zoowel F (1, 3) als F (1, 8) met gelijke grootste positieve waarden volgen, komen thans de drie onbekenden x_1, x_3 en x_8 gelijktijdig ter vermindering in aanmerking, zoodat wij in het geval van § 12 verkeeren. Stellen wij derhalve

$$x_1 = 4\tfrac{6}{13} - v_1,\ x_3 = 3 - v_3,\ x_8 = 1 - v_8,$$

dan gaan (α_2) en (β_2) over in

$$153\tfrac{10}{13} - (19\,v_1 + 13\,v_3 + 10\,v_8) = 0 \quad \text{en} \quad -13\,v_1 + 7\,v_3 + 17\,v_8 = 0;$$

kunnende de eerste vergelijking, door middel van de laatste, vervormd worden tot

$$153\tfrac{10}{13} - (v_1 + v_3 + v_8) \times 15\tfrac{1}{10} = 0.$$

Bepalen wij nu de waarden van v_1, v_3 en v_8, die aan de vergelijking $-13\,v_1 + 7\,v_3 + 17\,v_8 = 0$ voldoen, respectievelijk de grenzen $4\frac{6}{13}$, 3 en 1 niet overschrijden, en eene zoo groot mogelijke som hebben, dan vinden wij daarvoor $v_1 = 2\frac{12}{13}$, $v_3 = 3$ en $v_8 = 1$; maar de som dezer waarden is te klein, om met $15\frac{1}{10}$ vermenigvuldigd een product te geven, dat $153\frac{10}{13}$ overtreft of evenaart; derhalve is de nieuwe vermindering van x_1, x_3 en x_8 alnog ontoereikend, en zal men dus werkelijk $v_1 = 2\frac{12}{13}$, $v_3 = 3$ en $v_8 = 1$ moeten nemen, waardoor de drie onbekenden verminderd worden tot $x_1 = 1\frac{7}{13}$, $x_3 = 0$ en $x_8 = 0$, terwijl $A_1 = 1\frac{7}{13}$ wederom eene nieuwe grenswaarde voor x_1 zal worden. Alzoo behouden wij de vergelijkingen:

$$19\,x_1 + 5\,x_2 + 8\,x_4 - 6\,x_7 = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha_3)$$

$$13\,x_1 + 10\,x_2 - 8\,x_4 - 12\,x_7 = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots (\beta_3)$$

met de grenswaarden $A_1 = 1\frac{7}{13}$, $A_2 = 18$, $A_4 = 2\frac{1}{2}$ en $A_7 = 15$, volgens welke dan $\Sigma\,(a\,A) = 49\frac{3}{13}$ is.

De waarde van F (2, 6), die verder in grootte volgt, vloeit uit eene combinatie van twee onbekenden voort, waarvan er reeds eene tot nul is verminderd geworden; zij vervalt alzoo, weshalve de daarop volgende waarde van F (1, 4) thans de onbekenden x_1 en x_4 ter vermindering aanwijst. Wij stellen dus $x_1 = 1\frac{7}{13} - v_1$ en $x_4 = 2\frac{1}{2} - v_4$, waardoor (α_3) en (β_3) worden

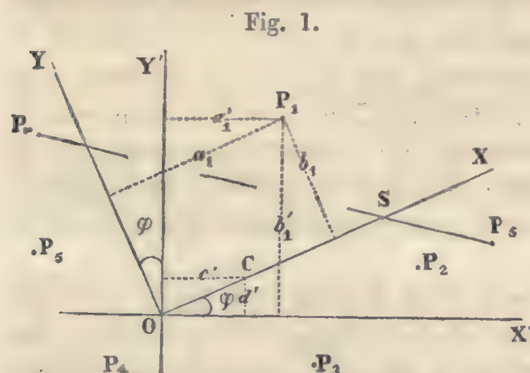
$$49\tfrac{3}{13} - (19\,v_1 + 8\,v_4) = 0 \quad \text{en} \quad -13\,v_1 + 8\,v_4 = 0;$$

lossen wij hieruit v_1 en v_4 op, dan vinden wij $v_1 = 1\frac{7}{13}$ en $v_4 = 2\frac{1}{2}$; daar deze waarden de grenzen niet overschrijden, blijkt hieruit, dat eindelijk de opvolgende verminderingen door deze op eene toereikende wijze voltooid worden, terwijl wij er door verkrijgen $x_1 = 0$ en $x_4 = 0$.

Met uitzondering van x_2 en x_7, die geene vermindering ondergaan hebben, zijn nu achtervolgens al onze onbekenden tot nul verminderd. Ter beantwoording der vraag moeten wij dus voor x_2 en x_7 hare grenswaarden, en voor al de andere onbekenden nul nemen. De som van de waarden der onbekenden wordt dan $A_2 + A_7 = 33$; en deze is nu grooter dan de som van alle andere positieve waarden der onbekenden, die, zonder de gegevene grenzen te overschrijden, aan de gegevene vergelijkingen (α) en (β) voldoen.

§ 15.

Hiermede de geheel stelkunstige oplossing van het voorgestelde problema afgeloopen zijnde, blijft mij over het verband te doen zien, dat er bestaat tusschen al de deelen dezer oplossing, en de bepaling van den grootsten last, dien eenige steunpunten van gegevene draagvermogens dragen kunnen.



Stellen wij door A_1, A_2, A_3, enz. de bekende uiterste draagvermogens voor van eenige steunpunten P_1, P_2, P_3, enz. (Fig. 1) op welke een onbuigbaar horizontaal vlak rust. Laat verder op dit horizontale vlak een punt O naar welgevallen gegeven zijn, en gevraagd worden den grootsten last L te vinden, waarmede het genoemde vlak in het punt O kan bezwaard worden, zonder het bezwijken van eenig steunpunt te veroorzaken. Indien wij dan de onbekende drukkingen, door dien grootsten last op de steunpunten uitgeoefend, respectievelijk door x_1, x_2, x_3, x_4, enz. voorstellen, hebben wij al dadelijk

$$L = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \text{enz.},$$

waarin nu de onbekenden allen positief moeten zijn, en respectievelijk de grenzen A_1, A_2, A_3, A_4, enz. niet mogen overschrijden. Daar voorts de steunpunten gegeven zijn, mogen hunne coördinaten, ten opzigte van twee onderling regthoekige doch overigens willekeurig door O getrokken assen OX' en OY', als bekenden worden aangenomen; deze coördinaten respectievelijk door (a'_1, b'_1), (a'_2, b'_2), (a'_3, b'_3), enz. voorstellende, hebben wij dan verder, uit de

evenwigtsleer, voor de eenige voorwaarden, waaraan de onbekende drukkingen nog moeten voldoen:

$$a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + a'_3 x_3 + a'_4 x_4 + \text{enz.} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha')$$

en

$$b'_1 x_1 + b'_2 x_2 + b'_3 x_3 + b'_4 x_4 + \text{enz.} = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\beta')$$

Hieruit blijkt dan onmiddellijk, dat de begeerde grootste last niet anders is, dan de som der onbekenden, zooals die, uit de oplossing van het in § 1 opgegeven stelkunstige problema, gevonden worden.

§ 16.

De resultante $\Sigma(A)$ der gegevene draagvermogens, zal het horizontale vlak ergens in C snijden. De coördinaten c' en d' van dit punt C, dat wij het centrum der draagvermogens zullen noemen, mogen wij altijd als positief aanmerken, omdat de onderscheiding van de positieve en negatieve rigtingen der assen geheel willekeurig is. Wij hebben dan

$$c' = \frac{\Sigma(a'A)}{\Sigma(A)} \quad \text{en} \quad d' = \frac{\Sigma(b'A)}{\Sigma(A)};$$

waren dus $\Sigma(a'A)$ en $\Sigma(b'A)$ beide nul, dan zou het punt C in O vallen, en de grootste last in O zou dan gelijk zijn aan de resultante der draagvermogens, en dus $L = \Sigma(A)$.

Waren $\Sigma(a'A)$ of $\Sigma(b'A)$, en dus ook c' of d', een van beide nul, dan zou het centrum C op een der assen O X' of O Y' liggen. Is dit echter het geval niet, dan kan men, met behoud van denzelfden oorsprong O, nieuwe onderling regthoekige assen O X en O Y aannemen, waarvan er eene, b. v. O X, door het centrum C gaat; en dan zal, ten opzigte van die eene as, de som van de momenten der draagvermogens nul wezen.

Dit alles is blijkbaar in overeenstemming met hetgeen in § 2 is aangevoerd.

§ 17.

Laten de nieuwe coördinaten der steunpunten voorgesteld worden door (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), enz., dan worden de voorwaarden, waaraan de onbekende drukkingen x_1, x_2, x_3, enz. voldoen moeten, uitgedrukt door de vergelijkingen:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + \text{enz.} = 0, \ldots \ldots \ldots \ldots (\alpha)$$

en

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 + \text{enz.} = 0, \ldots \ldots \ldots \ldots (\beta)$$

terwijl de nieuwe coördinaten van het punt C zijn

$$\frac{\Sigma(a\,A)}{\Sigma(A)} = OC \text{ en } \frac{\Sigma(b\,A)}{\Sigma(A)} = 0,$$

waaruit volgt dat $\Sigma(a\,A)$ positief en $\Sigma(b\,A) = 0$ is.

De hier verkregene nieuwe vergelijkingen (α) en (β) zijn volkomen dezelfde, als de nieuwe vergelijkingen (α) en (β), die wij in § 3 opmaakten. Want zij φ de hoek van de nieuwe assen met de oude, en stellen wij $Cos.\,\varphi = p$ en $Sin.\,\varphi = q$, dan is, even als in § 3,

$$\frac{\Sigma(a'\,A)}{\Sigma(b'\,A)} = \frac{c'\,\Sigma(A)}{d'\,\Sigma(A)} = \frac{c'}{d'} = Cot.\,\varphi = \frac{Cos.\,\varphi}{Sin.\,\varphi} = \frac{p}{q};$$

de nieuwe coördinaten van eenig steunpunt worden dan verder in de oude coördinaten van dat punt uitgedrukt, door de formulen:

$$a = a'\,Cos.\,\varphi + b'\,Sin.\,\varphi = a'\,p + b'\,q,$$

$$b = b'\,Cos.\,\varphi - a'\,Sin.\,\varphi = b'\,p - a'\,q,$$

en deze nieuwe coördinaten zijn dus niet anders dan de nieuwe coëfficienten, die wij in § 3 ingevoerd hebben; terwijl eindelijk ook de nieuwe abscis OC van het centrum uitgedrukt wordt door

$$OC = c'\,Cos.\,\varphi + d'\,Sin.\,\varphi = \frac{\Sigma(a'\,A)}{\Sigma(A)}\,p + \frac{\Sigma(b'\,A)}{\Sigma(A)}\,q,$$

waaruit, daar $OC = \frac{\Sigma(a\,A)}{\Sigma(A)}$ is, wederom even als in § 3 volgt $\Sigma(a\,A) = p\,\Sigma(a'\,A) + q\,\Sigma(b'\,A)$.

Het gebruik der vergelijkingen (α) en (β) in plaats van (α') en (β') komt dus eenvoudig met eene behoorlijke verplaatsing der onderling regthoekige coördinatenassen overeen.

De momentvergelijkingen, waaraan de onbekende drukkingen x_1, x_2, x_3, enz. moeten voldoen, behoeven juist niet ten opzigte van twee onderling regthoekige lijnen genomen te worden. Nemen wij die momentvergelijkingen ten opzigte van de onderling scheefhoekige lijnen OX en OY', dan zou dit hetzelfde zijn, alsof wij in § 3 het invoeren der nieuwe vergelijking (α) hadden nagelaten, ten einde ons slechts van (α') en (β) te bedienen, zooals wij dit in het bijzondere voorbeeld van § 14 werkelijk gedaan hebben.

§ 18.

De grootste last, dien de steunpunten kunnen dragen, zou juist de som Σ (A) der draagvermogens zijn, indien hij juist in het centrum C werd aangebragt; de grootste last in O moet dus kleiner zijn en kan al de steunpunten niet tot hun vol draagvermogen belasten; de hoeveelheden, die er aan deze volle belasting ontbreken, zijn de zoogenaamde complementen der drukkingen. Daar zoowel de drukkingen als de draagvermogens gelijke momenten aan weêrszijden van O X hebben, moet dit ook met de complementen der drukkingen het geval wezen. Zoo wij dus onderstellen dat er geene steunpunten op de as O X liggen, moeten er zeker twee steunpunten, aan weêrszijden van die as gelegen, niet ten volle belast zijn. Terwijl het blijkbaar mede onmogelijk is, dat de niet ten volle belaste punten beide aan de andere zijde van O Y zouden liggen, dan waar het centrum C zich bevindt. Dit alles stemt blijkbaar overeen, met hetgeen in § 4 is aangevoerd; de complementen der drukkingen zijn hetgeen wij dáár de complementen der onbekenden genoemd hebben, terwijl de aldaar besprokene verminderingen der onbekenden, hier de ontlastingen der steunpunten zijn.

§ 19.

Laten P_r en P_s (Fig. 1) twee niet ten volle belaste steunpunten zijn en laten de drukkingen aldaar tot complementen hebben v_r en v_s, dan hebben deze complementen gelijke momenten ten opzigte van de as O X. Indien dus deze as, door eene lijn, uit P_r naar P_s getrokken, in het punt S gesneden wordt, geven deze complementen in het punt S eene resultante $v_r + v_s$, die ten opzigte van O Y tot moment heeft $(v_r + v_s) \times$ O S. Het moment der draagvermogens O C $\times \Sigma (A) = \Sigma (a A)$ wordt dus, door de genoemde ontlastingen der steunpunten P_r en P_s, verminderd tot

$$\Sigma (a A) - (v_r + v_s) \times OS;$$

dit moment moet nul worden, indien de genoemde ontlasting toereikend zal wezen, opdat de last in O gedragen worde, wiens grootte dan door $\Sigma (A) - (v_r + v_s)$ wordt uitgedrukt. Om dit moment nul te doen worden, zal eene kleinere waarde van $v_r + v_s$ meer afdoen, naargelang de lijn O S grooter is; maar hoe kleiner $v_r + v_s$ is, des te grooter blijft de last $\Sigma (A) - (v_r + v_s)$. Om

dus de last zoo groot mogelijk te laten blijven, moet men bij voorkeur de steunpunten ontlasten, wier vereenigingslijn het grootste stuk OS van de as OX afsnijdt.

Dit komt wederom overeen met hetgeen in § 5 gebleken is. Want, de coördinaten van het punt P_r door a_r en b_r, die van het punt P_s door a_s en b_s voorstellende, hebben wij, voor de vergelijking der lijn $P_r P_s$,

$$\frac{x - a_r}{y - b_r} = \frac{a_s - a_r}{b_s - b_r};$$

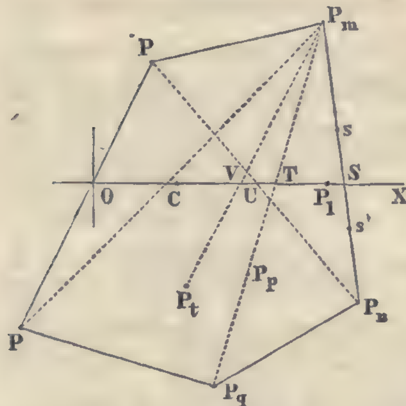
daar nu, voor $y = 0$, $x = \mathrm{OS}$ moet zijn, vinden wij hieruit

$$\mathrm{OS} = \frac{a_s b_r - a_r b_s}{b_r - b_s},$$

hetgeen dezelfde uitdrukking is, die wij in § 5 door $F(r, s)$ voorstelden.

Beschrijft men dus, zooals in Fig. 2, eenen veelhoek zonder inspringende hoeken, wiens hoekpunten elk in een der steunpunten P vallen, en zoodanig dat er geene steunpunten P buiten dien veelhoek blijven; en trekt men daarna uit het gegeven lastpunt O, door het vooraf bepaalde centrum C der draagvermogens, eene lijn die den omtrek des veelhoeks ergens in S ontmoet, dan zijn de steunpunten P_m en P_n, die men bij voorkeur ontlasten moet, gelegen op de veelhoekszijde, die door het punt S gaat.

Fig. 2.



Door de overige steunpunten aan wêerszijden van OX gelegen, twee aan twee te vereenigen, snijdt men evenzoo van de as OX stukken OT, OU, OV, enz. af, die door hunne afdalende grootte de steunpunten aanwijzen, die men achtervolgens ter ontlasting kiezen moet, tot dat de gezamenlijke ontlastingen toereikend zijn geworden, om de overblijvende draagvermogens eene resultante in O te doen opleveren, die zoo groot mogelijk is.

§ 20.

Laten v_m en v_n de complementen der drukkingen in P_m en P_n zijn, indien men dan, uit de vergelijkingen

$$v_m \times P_m S = v_n \times P_n S \quad \text{en} \quad \Sigma(a\,A) - (v_m + v_n) \times \mathrm{OS} = 0,$$

voor v_m en v_n waarden vindt, die de grenzen niet te boven gaan, vindt men in deze waarden de ontlastingen in P_m en P_n die toereikend zijn, om den grootsten last in O te bekomen.

De hier gebezigde vergelijkingen zijn wederom geene andere dan die van § 6, omdat $OS = F(m, n)$ en $P_m S : P_n S = b_m : - b_n$ is.

§ 21.

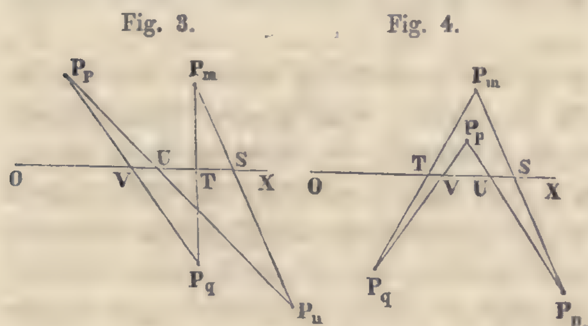
Vindt men echter voor v_m en v_n waarden, die de grenzen overschrijden, dan moet men de steunpunten P_m en P_n zooveel mogelijk ontlasten, als bestaanbaar is met het behouden van de resultante der drukkingen op de lijn OC, om eerst daarna tot het ontlasten van andere steunpunten over te gaan. Hierbij valt nu te onderscheiden of het centrum der beide draagvermogens A_m en A_n juist in S, dan wel in s of s' aan deze of gene zijde van OX valt. Valt dit centrum in S, zoo kan men de beide steunpunten geheel ontlasten, want men verkrijgt hierdoor complementen $v_m = A_m$ en $v_n = A_n$, die, omdat nu $A_m \times P_m S = A_n \times P_n S$ is, almede eene resultante in S hebben. Naargelang echter het genoemde centrum in s of s' valt, zal men òf P_n geheel en P_m gedeeltelijk, òf P_m geheel en P_n gedeeltelijk kunnen ontlasten; want in het eerste geval b. v. is $A_m \times P_m s = A_n \times P_n s$, dus $A_m \times P_m S > A_n \times P_n S$ en $\frac{P_n S}{P_m S} \times A_n < A_m$, zoodat men, zonder de grenzen te overschrijden, $v_n = A_n$ en $v_m = \frac{P_n S}{P_m S} \times A_n$ kan nemen, om complementen v_m en v_n te bekomen, wier resultante in S valt.

Dit alles komt overeen met hetgeen in § 7 is aangetoond. Want ligt het centrum der beide draagvermogens A_m en A_n juist in S, dan is $b_m A_m + b_n A_n = 0$; naargelang daarentegen dit centrum in s of s' valt, komt de positieve of negatieve waarde van $b_m A_m + b_n A_n$ in teeken overeen met b_m of b_n.

Na op deze wijze dan de beide steunpunten P_m en P_n zooveel mogelijk ontlast te hebben, zal men op eene dergelijke wijze tot ontlasting van andere steunpunten moeten overgaan; daartoe telkens de voorkeur gevende aan die steunpunten, welke achtervolgens door de in grootte afdalende stukken OT, OU, OV, enz. worden aangewezen; tot dat men ten laatste eene voldoende ontlasting van steunpunten gevonden heeft, om de resultante der in het geheel nog overblijvende drukkingen, of den grootsten last, in O te bekomen.

§ 22.

Wanneer, door de vereenigingslijn van twee aan weêrszijden van de as OX gelegene steunpunten P_m en P_n, het grootste stuk OS van die as wordt afgesneden, zullen blijkbaar al de andere steunpunten aan dien kant van de lijn P_mP_n gelegen zijn, waar het punt O zich bevindt. Trekt men dus eene vereenigingslijn, tusschen twee nieuwe steunpunten P_p en P_q (Fig. 3 of 4) aan weêrszijden van OX gelegen, dan zal het stuk OV, door deze vereenigingslijn van OX afgesneden, niet in grootte onmiddellijk op OS kunnen volgen; want trekt men nog de vereenigingslijnen P_mP_q en P_nP_p, die de as in T en U snijden, dan moeten de stukken OT en OU, indien niet beide zooals Fig. 3, ten minste zeker een van beide zooals in Fig. 4, grooter dan OV zijn. Dit komt blijkbaar overeen met de in § 9 betoogde eigenschap, volgens welke de vereenigingslijnen, die het grootste en het naastgrootere stuk van OX afsnijden, uit eenig zelfde steunpunt moeten voortkomen.



Heeft men nu, bij eene aanvankelijke ontlasting der beide eerste steunpunten, P_m geheel en P_n gedeeltelijk moeten ontlasten, zoodat men verder het paar punten door OT aangewezen niet meer gebruiken kan, dan zal eene volgende ontlasting zich over de door OU aangewezene steunpunten P_n en P_p moeten uitstrekken. Is echter aanvankelijk P_n geheel en P_m gedeeltelijk moeten ontlast worden, zoodat het paar punten door OU aangewezen niet meer bruikbaar is, dan zal eene tweede ontlasting zich al of niet andermaal over P_m uitstrekken, naargelang zooals in Fig. 3 $OT > OV$, of zooals in Fig. 4 $OT < OV$ is.

Deze aaneenschakeling der opvolgende ontlastingen, komt overeen met hetgeen in § 10 is aangevoerd.

§ 23.

In het bijzondere geval dat eenig steunpunt P_t op de uit O door C getrokkene lijn OX ligt, zal de drukking x_t, op dit steunpunt uitgeoefend, in de vergelijking (β) ontbreken.

Is nu dit steunpunt een hoekpunt van den meergenoemden veelhoek, zoo-

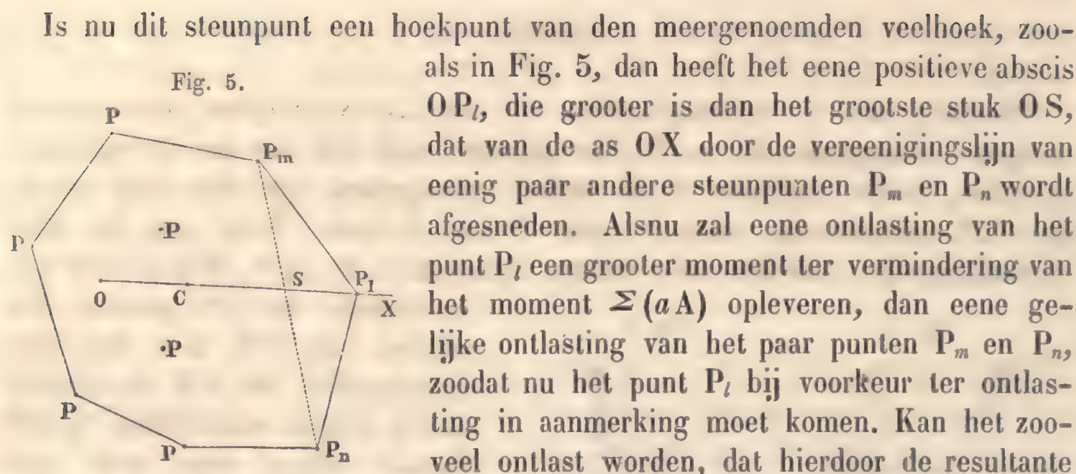


Fig. 5.

als in Fig. 5, dan heeft het eene positieve abscis OP_l, die grooter is dan het grootste stuk OS, dat van de as OX door de vereenigingslijn van eenig paar andere steunpunten P_m en P_n wordt afgesneden. Alsnu zal eene ontlasting van het punt P_l een grooter moment ter vermindering van het moment $\Sigma(aA)$ opleveren, dan eene gelijke ontlasting van het paar punten P_m en P_n, zoodat nu het punt P_l bij voorkeur ter ontlasting in aanmerking moet komen. Kan het zooveel ontlast worden, dat hierdoor de resultante der drukkingen (die dan voor al de andere steunpunten tot het volle draagvermogen genomen worden) in O komt, zoo is die resultante de begeerde grootste last; kan dit echter niet, dan moet het steunpunt P_l geheel ontlast, en deze ontlasting door eene gedeeltelijke of geheele van het paar punten P_m en P_n achtervolgd worden.

Ligt echter het steunpunt P_l binnen den veelhoek, zooals in Fig. 2, dan kan het ter ontlasting eerst in aanmerking komen, nadat de steunpunten, aangewezen door stukken OS die grooter dan OP_l zijn, zooveel mogelijk zijn ontlast geworden. Indien ook daarna eene geheele ontlasting van P_l nog ongenoegzaam is, zal men verder de steunpunten moeten ontlasten, die daartoe weder door de grootste lijn, hetzij dan van OX door eene vereenigingslijn afgesneden, hetzij uit O naar eenig op OX gelegen steunpunt loopende, wordt aangewezen.

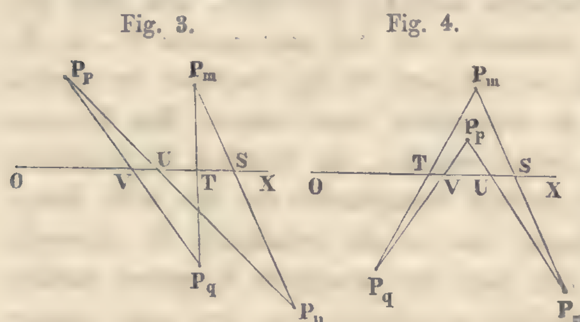
Dit alles stemt volkomen overeen met hetgeen in § 11 is aangevoerd.

§ 24.

In het bijzondere geval, dat de lijn OS, uit O door C getrokken, den omtrek van den veelhoek ontmoet in eene veelhoekszijde, waarop zich drie of meer, b.v. vijf, steunpunten bevinden, zooals in Fig. 6, hebben al deze steunpunten gelijktijdig de voorkeur ter ontlasting. Alsnu kan men zoodanige complementen van drukkingen op deze punten bepalen, dat die complementen zonder hunne grenzen te overschrijden, de grootstmogelijke resultante in S zouden leveren; die complementen v_m, v_n, enz. zullen dan voor-

§ 22.

Wanneer, door de vereenigingslijn van twee aan weêrszijden van de as O X gelegene steunpunten P_m en P_n, het grootste stuk O S van die as wordt afgesneden, zullen blijkbaar al de andere steunpunten aan dien kant van de lijn $P_m P_n$ gelegen zijn, waar het punt O zich bevindt. Trekt men dus eene vereenigingslijn, tusschen twee nieuwe steunpunten P_p en P_q (Fig. 3 of 4) aan weêrszijden van O X gelegen, dan zal het stuk O V, door deze vereenigingslijn van O X afgesneden, niet in grootte onmiddellijk op O S kunnen volgen; want trekt men nog de vereenigingslijnen $P_m P_q$ en $P_n P_p$, die de as in T en U snijden, dan moeten de stukken O T en O U, indien niet beide zooals Fig. 3, ten minste zeker een van beide zooals in Fig. 4, grooter dan O V zijn. Dit komt blijkbaar overeen met de in § 9 betoogde eigenschap, volgens welke de vereenigingslijnen, die het grootste en het naastgrootere stuk van O X afsnijden, uit eenig zelfde steunpunt moeten voortkomen.



Heeft men nu, bij eene aanvankelijke ontlasting der beide eerste steunpunten, P_m geheel en P_n gedeeltelijk moeten ontlasten, zoodat men verder het paar punten door O T aangewezen niet meer gebruiken kan, dan zal eene volgende ontlasting zich over de door O U aangewezene steunpunten P_n en P_p moeten uitstrekken. Is echter aanvankelijk P_n geheel en P_m gedeeltelijk moeten ontlast worden, zoodat het paar punten door O U aangewezen niet meer bruikbaar is, dan zal eene tweede ontlasting zich al of niet andermaal over P_m uitstrekken, naargelang zooals in Fig. 3 $OT > OV$, of zooals in Fig. 4 $OT < OV$ is.

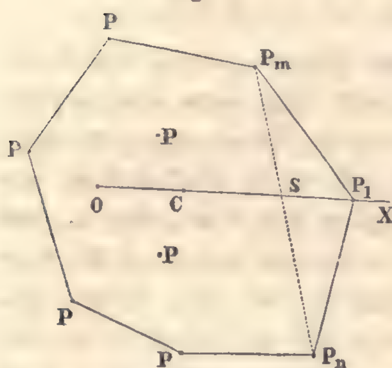
Deze aaneenschakeling der opvolgende ontlastingen, komt overeen met hetgeen in § 10 is aangevoerd.

§ 23.

In het bijzondere geval dat eenig steunpunt P_l op de uit O door C getrokkene lijn O X ligt, zal de drukking x_l, op dit steunpunt uitgeoefend, in de vergelijking (β) ontbreken.

Is nu dit steunpunt een hoekpunt van den meergenoemden veelhoek, zooals in Fig. 5, dan heeft het eene positieve abscis OP_l, die grooter is dan het grootste stuk OS, dat van de as OX door de vereenigingslijn van eenig paar andere steunpunten P_m en P_n wordt afgesneden. Alsnu zal eene ontlasting van het punt P_l een grooter moment ter vermindering van het moment $\Sigma(aA)$ opleveren, dan eene gelijke ontlasting van het paar punten P_m en P_n, zoodat nu het punt P_l bij voorkeur ter ontlasting in aanmerking moet komen. Kan het zooveel ontlast worden, dat hierdoor de resultante der drukkingen (die dan voor al de andere steunpunten tot het volle draagvermogen genomen worden) in O komt, zoo is die resultante de begeerde grootste last; kan dit echter niet, dan moet het steunpunt P_l geheel ontlast, en deze ontlasting door eene gedeeltelijke of geheele van het paar punten P_m en P_n achtervolgd worden.

Fig. 5.



Ligt echter het steunpunt P_l binnen den veelhoek, zooals in Fig. 2, dan kan het ter ontlasting eerst in aanmerking komen, nadat de steunpunten, aangewezen door stukken OS die grooter dan OP_l zijn, zooveel mogelijk zijn ontlast geworden. Indien ook daarna eene geheele ontlasting van P_l nog ongenoegzaam is, zal men verder de steunpunten moeten ontlasten, die daartoe weder door de grootste lijn, hetzij dan van OX door eene vereenigingslijn afgesneden, hetzij uit O naar eenig op OX gelegen steunpunt loopende, wordt aangewezen.

Dit alles stemt volkomen overeen met hetgeen in § 11 is aangevoerd.

§ 24.

In het bijzondere geval, dat de lijn OS, uit O door C getrokken, den omtrek van den veelhoek ontmoet in eene veelhoekszijde, waarop zich drie of meer, b.v. vijf, steunpunten bevinden, zooals in Fig. 6, hebben al deze steunpunten gelijktijdig de voorkeur ter ontlasting. Alsnu kan men zoodanige complementen van drukkingen op deze punten bepalen, dat die complementen zonder hunne grenzen te overschrijden, de grootstmogelijke resultante in S zouden leveren; die complementen v_m, v_n, enz. zullen dan voor-

eerst voldoen aan de vergelijking

$$v_m \times P_m S + v_n \times P_n S = v_p \times P_p S + v_q \times P_q S + v_t \times P_t S;$$

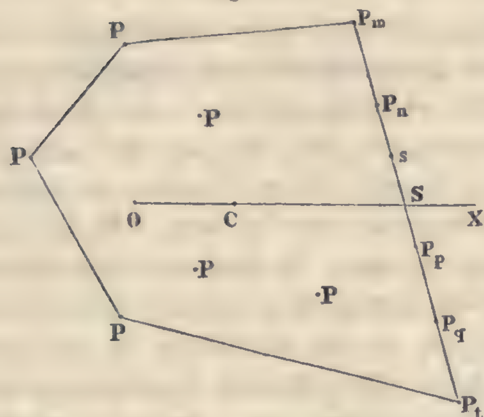


Fig. 6.

ten andere zullen zij allen aan eene zijde van O X hunne grenswaarde hebben, en wel aan de tegengestelde zijde van O X, als waar het centrum der vijf draagvermogens valt. Valt dus dit centrum in s, dan zullen tot het bedoelde einde v_p, v_q en v_t gelijk aan de grenzen A_p, A_q en A_t genomen moeten worden; terwijl naargelang van omstandigheden $v_m = 0$ of $v_n = A_n$ kan zijn, en dan verder v_n of v_m door de bovenstaande vergelijking bepaald wordt *.

Levert nu deze grootstmogelijke resultante $\Sigma\,(v)$ der vijf complementen, een moment $OS \times \Sigma\,(v)$ dat grooter is dan $\Sigma\,(a\,A)$, zoo zal men aan de vergelijking $\Sigma\,(a\,A) - OS \times \Sigma\,(v) = 0$ kunnen voldoen, zonder dat een der complementen zijne grens overschrijdt, door voor die complementen kleinere waarden dan de zoo even bepaalde te nemen, waartoe men b.v. deze laatsten in eene zelfde verhouding zou kunnen verkleinen. In dit geval wordt dus, door alleen de beschouwde vijf punten te ontlasten, de grootste last in O gevonden; en de gezamenlijke ontlasting dier steunpunten, die dan altijd door $\frac{\Sigma\,(a\,A)}{OS}$ wordt uitgedrukt, kan over de vijf steunpunten op ontelbaar verschillende wijzen verdeeld worden, waarvan de genoemde evenredige verkleining er ééne oplevert.

Is echter het bovengenoemde moment $OS \times \Sigma\,(v)$ kleiner dan $\Sigma\,(a\,A)$, zoo is de ontlasting der vijf steunpunten ontoereikend; alsnu zal men die ontlasting zoo ver mogelijk moeten uitstrekken, dat is, men zal de ontlastingen juist gelijk moeten nemen aan de complementen die gevonden waren

* Dit een en ander met betrekking tot steunpunten in eene regte lijn liggende, meen ik als bekend te mogen aannemen. Zie J. P. Delprat, *Beginselen der Mechanica* § 104.

eene grootstmogelijke resultante in S op te leveren; hierdoor zullen van onze vijf steunpunten, diegene welke aan ééne zijde van OX liggen geheel ontlast worden, terwijl er voor de anderen eene geheele en eene gedeeltelijke ontlasting uit kan voortvloeijen. Na deze ontlasting, zal dan eene ontlasting van nieuwe steunpunten moeten volgen.

Het ontlasten van drie of meer steunpunten, dat zich aanvankelijk voordoet wanneer die punten op de door OS aangewezene veelhoekszijde liggen, kan ook na voorafgegane ontlastingen van andere steunpunten voorkomen. Dit zal het geval zijn, indien zij in eene vereenigingslijn liggen, die van OX een stuk afsnijdt, dat in grootte volgt op de lijn, die de laatst voorafgegane ontlasting heeft aangewezen. Zoo wordt b.v. in Fig. 2, welke figuur naar het getallenvoorbeeld van § 14 geteekend is, eerst de ontlasting der punten P_m en P_n door de lijn OS aangewezen, waaruit eene geheele ontlasting van P_n en eene gedeeltelijke van P_m voortvloeit; verder wordt door de lijn OP_l het punt P_l aangewezen, dat geheel ontlast wordt; daarna wijst de lijn OT de drie op eene regte lijn liggende steunpunten P_m, P_p en P_q ter ontlasting aan, waarvan de beide laatstgenoemden geheel, en het punt P_m andermaal gedeeltelijk ontlast wordt; eindelijk wijst de lijn OV de punten P_m en P_t aan, die nu nog geheel ontlast worden; zoodat de grootste last, die in O door al de steunpunten gedragen kan worden, alleen door de beide overblijvende steunpunten P gedragen wordt, en gelijk aan de som van beider draagvermogens is.

Ook dit een en ander strookt volkomen, met hetgeen in § 12 en § 15 over het verminderen der onbekenden gezegd is.

Na alzoo thans ook het verband aangetoond te hebben, dat overal tusschen de stelkunstige oplossing van het opgegevene problema, en de evenwigts-beschouwingen ter bepaling van den grootsten last, bestaat, meen ik de taak die ik mij voorstelde te hebben volbragt; en eindig ik met den wensch, dat ik hierdoor eene niet geheel nuttelooze bijdrage tot de toegepaste mechanica moge geleverd hebben.

Breda, Maart 1859.

eerst voldoen aan de vergelijking

$$v_m \times P_m S + v_n \times P_n S = v_p \times P_p S + v_q \times P_q S + v_t \times P_t S;$$

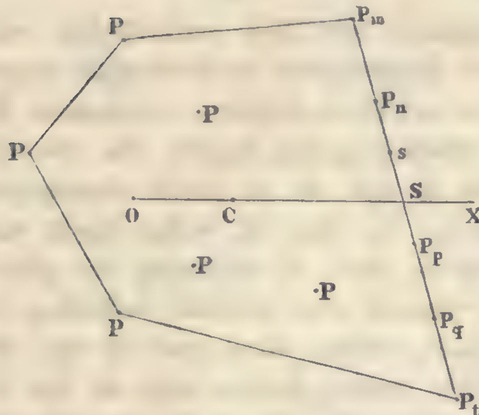


Fig. 6.

ten andere zullen zij allen aan eene zijde van O X hunne grenswaarde hebben, en wel aan de tegengestelde zijde van O X, als waar het centrum der vijf draagvermogens valt. Valt dus dit centrum in *s*, dan zullen tot het bedoelde einde v_p, v_q en v_t gelijk aan de grenzen A_p, A_q en A_t genomen moeten worden; terwijl naargelang van omstandigheden $v_m = 0$ of $v_n = A_n$ kan zijn, en dan verder v_n of v_m door de bovenstaande vergelijking bepaald wordt *.

Levert nu deze grootstmogelijke resultante $\Sigma\,(v)$ der vijf complementen, een moment $O\,S \times \Sigma\,(v)$ dat grooter is dan $\Sigma\,(a\,A)$, zoo zal men aan de vergelijking $\Sigma\,(a\,A) - O\,S \times \Sigma\,(v) = 0$ kunnen voldoen, zonder dat een der complementen zijne grens overschrijdt, door voor die complementen kleinere waarden dan de zoo even bepaalde te nemen, waartoe men b.v. deze laatsten in eene zelfde verhouding zou kunnen verkleinen. In dit geval wordt dus, door alleen de beschouwde vijf punten te ontlasten, de grootste last in O gevonden; en de gezamenlijke ontlasting dier steunpunten, die dan altijd door $\frac{\Sigma\,(a\,A)}{O\,S}$ wordt uitgedrukt, kan over de vijf steunpunten op ontelbaar verschillende wijzen verdeeld worden, waarvan de genoemde evenredige verkleining er ééne oplevert.

Is echter het bovengenoemde moment $O\,S \times \Sigma\,(v)$ kleiner dan $\Sigma\,(a\,A)$, zoo is de ontlasting der vijf steunpunten ontoereikend; alsnu zal men die ontlasting zoo ver mogelijk moeten uitstrekken, dat is, men zal de ontlastingen juist gelijk moeten nemen aan de complementen die gevonden waren

* Dit een en ander met betrekking tot steunpunten in eene regte lijn liggende, meen ik als bekend te mogen aannemen. Zie J. P. Delprat, *Beginselen der Mechanica* § 104.

eene grootstmogelijke resultante in S op te leveren; hierdoor zullen van onze vijf steunpunten, diegene welke aan ééne zijde van OX liggen geheel ontlast worden, terwijl er voor de anderen eene geheele en eene gedeeltelijke ontlasting uit kan voortvloeijen. Na deze ontlasting, zal dan eene ontlasting van nieuwe steunpunten moeten volgen.

Het ontlasten van drie of meer steunpunten, dat zich aanvankelijk voordoet wanneer die punten op de door OS aangewezene veelhoekszijde liggen, kan ook na voorafgegane ontlastingen van andere steunpunten voorkomen. Dit zal het geval zijn, indien zij in eene vereenigingslijn liggen, die van OX een stuk afsnijdt, dat in grootte volgt op de lijn, die de laatst voorafgegane ontlasting heeft aangewezen. Zoo wordt b.v. in Fig. 2, welke figuur naar het getallenvoorbeeld van § 14 geteekend is, eerst de ontlasting der punten P_m en P_n door de lijn OS aangewezen, waaruit eene geheele ontlasting van P_n en eene gedeeltelijke van P_m voortvloeit; verder wordt door de lijn OP_l het punt P_l aangewezen, dat geheel ontlast wordt; daarna wijst de lijn OT de drie op eene regte lijn liggende steunpunten P_m, P_p en P_q ter ontlasting aan, waarvan de beide laatstgenoemden geheel, en het punt P_m andermaal gedeeltelijk ontlast wordt; eindelijk wijst de lijn OV de punten P_m en P_t aan, die nu nog geheel ontlast worden; zoodat de grootste last, die in O door al de steunpunten gedragen kan worden, alleen door de beide overblijvende steunpunten P gedragen wordt, en gelijk aan de som van beider draagvermogens is.

Ook dit een en ander strookt volkomen, met hetgeen in § 12 en § 15 over het verminderen der onbekenden gezegd is.

Na alzoo thans ook het verband aangetoond te hebben, dat overal tusschen de stelkunstige oplossing van het opgegevene problema, en de evenwigts-beschouwingen ter bepaling van den grootsten last, bestaat, meen ik de taak die ik mij voorstelde te hebben volbragt; en eindig ik met den wensch, dat ik hierdoor eene niet geheel nuttelooze bijdrage tot de toegepaste mechanica moge geleverd hebben.

Breda, Maart 1859.

THEORIE

VAN HET

INTENSITEITS-KOMPAS

EN VAN

ZIJN GEBRUIK OP IJZEREN EN HOUTEN SCHEPEN.

DOOR

F. J. STAMKART.

Uitgegeven door de Koninklijke Akademie van Wetenschappen.

MET EENE PLAAT.



AMSTERDAM,
C. G. VAN DER POST.
1859.

THEORIE

VAN HET

INTENSITEITS-KOMPAS

EN VAN

ZIJN GEBRUIK OP IJZEREN EN HOUTEN SCHEPEN.

DOOR

F. J. STAMKART.

In het Achtste Deel, bladz. 399 der *Verslagen en Mededeelingen* is aangewezen wat ik met den naam van *Intensiteits-Kompas* gemeend heb te mogen bestempelen, te weten: »twee kompas-naalden, ieder voorzien van hare rozen, »met de middelpunten vertikaal boven elkander opgehangen, op zoodanigen »afstand, dat door de wederkeerige magnetische werking de naalden buiten »het vlak van den magnetischen meridiaan gebragt worden, de eene naar de »linker-, de andere naar de regterzijde eenen hoek met dit vlak makende." De wijze van ophanging of ondersteuning der naalden is de gewone, namelijk door middel van eene stift en agaten-dop voor elke naald, dierwijze dat beide naalden geheel vrij in hare bewegingen in een horizontaal vlak blijven. Er dient eene inrigting bij te zijn waardoor men den afstand der stiften die de naalden dragen, kan wijzigen, en ook de maat van dien afstand kan aflezen, terwijl voor het gebruik het geheel in eene doos of, — gewoonlijk genoemd, — ketel bevat moet wezen, welke op de gewone wijze in beugels zal moeten hangen om steeds eenen horizontalen stand te kunnen behouden. Eindelijk moeten nog beide rozen gelijktijdig afgelezen kunnen worden. Deze vereischten zijn, ofschoon zij eenig overleg vorderen, ligt te voldoen: bepalen wij ons voor heden tot de theorie van den stand der beide naalden, en hoe daaruit de

horizontale intensiteit van het magnetismus op de plaats der naalden kan worden afgeleid, en vervolgens, aan boord van schepen, ook de afwijkingen van het kompas, voortgebragt door de aantrekking van het scheeps-ijzer.

Wij zullen de eenvoudige onderstelling aannemen, dat de magnetische krachten der naalden in twee punten geconcentreerd zijn, in de beide polen, doch vooraf aanwijzen, dat deze onderstelling, ook wanneer de naalden zeer nabij elkander zijn, voldoend naauwkeurige uitkomsten geeft.

Onderstellen wij twee magneetnaalden of staven, in horizontale vlakken gelegen, maar overigens in eenen willekeurigen betrekkelijken stand, de eene bewegelijk om haar midden, de andere vast liggend. Zij (Fig. 1) m en M de projectiën der middelpunten der staven op een horizontaal vlak; $m\,n$ de *helft* der eene — M N de *helft* der andere staaf; n en N de noordpolen, waardoor wij die verstaan welke bij eene vrije ophanging zich naar het noorden wenden. m N′en M N′ de rigting van den magnetischen meridiaan.

De halve lengte der staven . . . . $m\,n = l$,
$\mathrm{M\,N} = \mathrm{L}$;
De *projectie* van den afstand der middelpunten . . . $m\,\mathrm{M} = \varrho$,
Het *verschil* van vertikale hoogte . . . . $= h$,
De hoek der projectie m M, met den meridiaan . . . $\mathrm{N}'\,m\,\mathrm{M} = \alpha$.
Zij $m\,n$ de bewegelijke naald, en hare afwijking, gerekend naar het westen . . . . $\mathrm{N}'\,m\,n = \varphi$,
M N de vaste magneet, welke wij, ter onderscheiding, *staaf* zullen noemen, en de hoek welke deze met den meridiaan maakt, gerekend naar het oosten . . . . $\mathrm{N}'\,\mathrm{M\,N} = \varphi'$,
Dan is de hoek tusschen de beide magneten . . . . $m\mathrm{A\,M} = \psi = \varphi + \varphi'$.

Eindelijk laten de ordinaten van het midden M der staaf, gerekend evenwijdig en regthoekig op de rigting $n\,m$, en vertikaal, genomen van den oorsprong m, zijn . . . . x, y en h.

Dan zijn de ordinaten van het punt N, gerekend van denzelfden oorsprong . . . . $x + \mathrm{L}\,Cos.\,\psi$, $y + \mathrm{L}\,Sin.\,\psi$, h,
en de ordinaten van n . . . . l, o, o.

Zij R de regtlijnige afstand in de ruimte, der beide polen N en n, dan heeft men:

$$\mathrm{R}^2 = (x - l + \mathrm{L}\,Cos.\,\psi)^2 + (y + \mathrm{L}\,Sin.\,\psi)^2 + h^2;$$

en

$$x = \varrho\,Cos.\,(\alpha + \varphi) \quad , \quad y = \varrho\,Sin.\,(\alpha + \varphi).$$

Hieruit volgt, na eenige herleiding:

$$R^2 = \varrho^2 + h^2 + L^2 + l^2 + 2\,\varrho\,L\,Cos.(\alpha - \varphi') - 2\,\varrho\,l\,Cos.(\alpha + \varphi) - 2\,L\,l\,Cos.\psi.$$

Zij $\varrho^2 + h^2 + L^2 + l^2 = r^2,$

en $-\varrho\,L\,Cos.(\alpha - \varphi') + \varrho\,l\,Cos.(\alpha + \varphi) + L\,l\,Cos.\psi = p\,r^2;$

dan is $R = r\sqrt{1 - 2p};$

bijgevolg $R^{-3} = \frac{1}{r^3}\left\{1 + \frac{3}{1}p + \frac{3.5}{1.2}p^2 + \frac{3.5.7}{1.2.3}p^3 + \text{enz.}\right\}$

$$= r^{-3}(1 + \mu) \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Zij M een getal evenredig aan de magnetische kracht die in de Noordpool N wordt aangenomen; m een dergelijk getal voor de pool n, en i de horizontaal ontbondene aard-magnetische kracht; dan is de kracht waarmede de beide polen N en n op elkander werken evenredig aan $\frac{M\,m}{R^2}$ en afstootend.

Ontbindt men deze kracht in twee andere X en Y, gerigt volgens de ordinaten x en y, en van den oorsprong uitgaande, dan komt:

$$X = -\frac{Mm}{R^3}(x - l + L\,Cos.\psi),$$

$$Y = -\frac{Mm}{R^3}(y + L\,Sin.\psi);$$

of

$$X = -Mm\,r^{-3}(1 + \mu)(x - l + L\,Cos.\psi),$$

$$Y = -Mm\,r^{-3}(1 + \mu)(y + L\,Sin.\psi).$$

Wanneer men in deze uitdrukkingen L en M negatief stelt, waardoor ook μ verandert, dan verkrijgt men de krachten, die uit de zuidpool der staaf M op de noordpool n der naald m werken; deze krachten zijn dus

$$X' = +Mm\,r^{-3}(1 + \mu')(x - l - L\,Cos.\psi),$$

$$Y' = +Mm\,r^{-3}(1 + \mu')(y - L\,Cos.\psi).$$

De krachten welke van de staaf M uitgaan en op de noordpool n der naald werken, zijn dus:

$$X_n = X + X' = Mm\,r^{-3}\{-2\,L\,Cos.\psi + (\mu' - \mu)(x - l) - (\mu' + \mu)\,L\,Cos.\psi\},$$

$$Y_n = Y + Y' = Mm\,r^{-3}\{-2\,L\,Sin.\psi + (\mu' - \mu).\,y \quad - (\mu' + \mu)\,L\,Sin.\psi\}.$$

Door in deze uitdrukkingen nu weder l en m negatief te nemen verkrijgt men de waarde der krachten die van de staaf M uitgaan en op de zuidpool der naald m werken; deze zijn dus:

$$X_z = Mmr^{-3}\{+2L\,Cos.\,\psi - (\mu'' - \mu''')(x+l) + (\mu'' + \mu''')L\,Cos.\,\psi\},$$
$$Y_z = Mmr^{-3}\{+2L\,Sin.\,\psi - (\mu'' - \mu''')\,.\,y + (\mu'' + \mu''')L\,Sin.\,\psi\}.$$

De aard-magnetische krachten welke op de polen n en z der naald m werken, zijn:

$$X'_n = mi\,Cos.\,\varphi, \qquad Y'_n = mi\,Sin.\,\varphi,$$
$$X'_z = -mi\,Cos.\,\varphi, \qquad Y'_z = -mi\,Sin.\,\varphi.$$

De resulterende krachten welke op het midden m der naald werken, en die geene uitwerking kunnen voortbrengen zijn dan:

$$X_n + X_z + X'_n + X'_z = X_n + X_z,$$
$$Y_n + Y_z + Y'_n + Y'_z = Y_n + Y_z;$$

of

$$Mmr^{-3}\{(\mu' - \mu - \mu'' + \mu''')x - (\mu' - \mu + \mu'' - \mu''')l - (\mu' + \mu - \mu'' - \mu''')L\,Cos.\,\psi\},$$
$$Mmr^{-3}\{(\mu' - \mu - \mu'' + \mu''')y - (\mu' + \mu - \mu'' - \mu''')L\,Sin.\,\psi\}.$$

Wanneer de naald m in haar evenwigts stand is, moet echter het resulterend koppel gelijk *nul* zijn, dat is

$$l(Y_n + Y'_n) - l(Y_z + Y'_z) = 0;$$

dus moet

$$Y_n - Y_z = -Y_n' + Y'_z = -2\,mi\,Sin.\,\varphi \qquad \text{zijn.}$$

Hieruit volgt:

$$2\,i\,Sin.\,\varphi = Mr^{-3}\{4\,L\,Sin.\,\psi + (\mu + \mu' + \mu'' + \mu''')L\,Sin.\,\psi + (\mu - \mu' - \mu'' + \mu''')\,y\};$$

of

$$2\,r^3\,Sin.\,\varphi = \frac{M}{i}\{(4 + \mu + \mu' + \mu'' + \mu''')L\,Sin.\,\psi + (\mu - \mu' - \mu'' + \mu''')\,\varrho\,Sin.\,(\alpha + \varphi)\}\,.\,(2)$$

waarbij behoort:

$$r^2 p = -\varrho L\,Cos.\,(\alpha - \varphi') + \varrho l\,Cos.\,(\alpha + \varphi) + Ll\,Cos.\,\psi, \quad \text{voor } +L \text{ en } +l,$$
$$r^2 p' = +\varrho L\,Cos.\,(\alpha - \varphi') + \varrho l\,Cos.\,(\alpha + \varphi) - Ll\,Cos.\,\psi, \quad \text{〃 } -L \text{ 〃 } +l,$$
$$r^2 p'' = +\varrho L\,Cos.\,(\alpha - \varphi') - \varrho l\,Cos.\,(\alpha + \varphi) + Ll\,Cos.\,\psi, \quad \text{〃 } -L \text{ 〃 } -l,$$
$$r^2 p''' = -\varrho L\,Cos.\,(\alpha - \varphi') - \varrho l\,Cos.\,(\alpha + \varphi) - Ll\,Cos.\,\psi, \quad \text{〃 } +L \text{ 〃 } -l.$$

Terwijl p en μ verbonden zijn door de vergelijking

$$\mu = (1 - 2p)^{-\frac{3}{2}} - 1.$$

Wanneer wij onderstellen, dat de staaf M ook vrij om haar midden kan bewegen, maar zoodanigen stand heeft, dat de op haar werkende krachten een resulterend koppel = *nul* geven, dan kan de hiertoe dienende voorwaarde gemakkelijk uit de vergelijking (2) worden afgeleid. Men verwissele m met M, l met L, ϱ met $-\varrho$ en, omdat de afwijking φ in de figuur naar het Westen φ' daarentegen naar het Oosten aangenomen is, schrijve men $-\varphi'$ voor φ en $-\varphi$ voor φ', waardoor ook ψ in $-\psi$ overgaat, dan komt, als men nog opmerkt dat alzoo μ' met μ''' moet verwisseld worden:

$$2\,r^3\,Sin.\,\varphi' = m\,\{(4+\mu+\mu'+\mu''+\mu''')\,l\,Sin\;\psi + (\mu+\mu'-\mu''-\mu''')\}\,\varrho\,Sin.\,(\alpha-\varphi')\} \quad . \;(3)$$

Zij, om de waarde der uitdrukkingen die van μ, μ', μ'' en μ''' afhangen nader te bepalen, kortheidshalve

$$a = \varrho\,L\,Cos.\,(\alpha-\varphi'), \qquad b = \varrho\,l\,Cos.\,(\alpha+\varphi), \qquad c = L\,l\,Cos.\,\psi,$$

dan is

$$p = (-a+b+c) : r^2,$$
$$p' = (+a+b-c) : r^2,$$
$$p'' = (+a-b+c) : r^2,$$
$$p''' = (-a-b-c) : r^2,$$

waaruit

$$p+p'+p''+p''' = 0,$$
$$\tfrac{1}{4}\,(p^2+p'^2+p''^2+p'''^2) = (a^2+b^2+c^2) : r^2,$$
$$\tfrac{1}{4}\,(p^3+p'^3+p''^3+p'''^3) = -\,6\,abc : r^2, \text{ enz.:}$$

$$\tfrac{1}{4}\,(p-p'-p''+p''') = -\,a : r^2, \qquad \tfrac{1}{4}\,(p+p'-p''-p''') = +\,b : r^2,$$
$$\tfrac{1}{4}\,(p^2-p'^2-p''^2+p'''^2) = 2\,bc : r^4, \qquad \tfrac{1}{4}\,(p^2+p'^2-p''^2-p'''^2) = -\,2\,ac : r^4,$$

$$\tfrac{1}{4}\,(p^3-p'^3-p''^3+p'''^3) = -\,a\,(a^2+3\,b^2+3\,c^2) : r^6, \text{ enz.}$$
$$\tfrac{1}{4}\,(p^3+p'^3-p''^3-p'''^3) = +\,b\,(b^2+3\,a^2+3\,c^2) : r^6, \text{ enz.}$$

Dus

$$\frac{\mu+\mu'+\mu''+\mu'''}{4} = \frac{3\,.\,5}{1\,.\,2}\,.\,\frac{a^2+b^2+c^2}{r^4} - \frac{3\,.\,5\,.\,7}{1\,.\,2\,.\,3} \times \frac{6\,abc}{r^6} + \text{enz.},$$

$$\frac{\mu-\mu'-\mu''+\mu'''}{4} = -\,\frac{3}{1}\,.\,\frac{a}{r^2} + \frac{3\,.\,5}{1\,.\,2} \times \frac{2\,bc}{r^4} - \frac{3\,.\,5\,.\,7}{1\,.\,2\,.\,3} \times \frac{a\,(a^2+3\,b^2+3\,c^2)}{r^6} + \text{enz.},$$

$$\frac{\mu+\mu'-\mu''-\mu'''}{4} = +\,\frac{3}{1}\,.\,\frac{b}{r^2} - \frac{3\,.\,5}{1\,.\,2} \times \frac{2\,ac}{r^4} + \frac{3\,.\,5\,.\,7}{1\,.\,2\,.\,3} \times \frac{b\,(b^2+3\,a^2+3\,c^2)}{r^6} - \text{enz.},$$

waardoor de waarden der coëfficiënten in μ der vergelijkingen (2) en (3) tot in de derde orde ontwikkeld, gegeven zijn, hetgeen, in genoegzaam alle ge-

vallen van toepassing, voldoende is. Men kan ook, in stede van de grootheden μ weder de afstanden R invoeren, welke in fig. 2 zijn voorgesteld. Aldus komt:

$$2 Sin.\varphi = \frac{M}{i}\{(R^{-3}+R'^{-3}+R''^{-3}+R'''^{-3})L Sin.\psi + (R^{-3}-R'^{-3}-R''^{-3}+R'''^{-3})\varrho Sin.(\alpha+\varphi)\}. (4)$$

$$2 Sin.\varphi' = \frac{m}{i}\{(R^{-3}+R'^{-3}+R''^{-3}+R'''^{-3})l Sin.\psi + (R^{-3}+R'^{-3}-R''^{-3}-R'''^{-3})\varrho Sin.(\alpha-\varphi')\}. (5)$$

De vergelijkingen (2) en (3) of (4) en (5) bevatten in zich de oplossing van alle vragen omtrent de standen van twee kompasnaalden die wederkeerig op elkander invloed uitoefenen, of van den stand van een kompas onder den invloed van eene vastliggende magneetstaaf, in de onderstelling, dat de magnetische krachten als in de beide polen opgehoopt mogen aangenomen worden. Alvorens verder te gaan, zullen wij door eene proefneming aanwijzen, dat deze onderstelling tot in nabijheden der beide magneten waardoor de afwijkingshoeken zeer groot worden, met eene voldoende naauwkeurigheid mag aangenomen worden. De bedoelde proef is genomen met eene magneetstaaf gelegen in de rigting *Oost-West* eenmaal ten Noorden en ten Zuiden van een kompas, en een andermaal ten Oosten en ten Westen van het kompas. In het eerste geval is $\alpha = 0$ of $180°$ en $\varphi' = 90$; in het tweede $\alpha = 90$ of $270°$ in $\varphi' = 90°$. Wij hebben dus:

1°. De staaf *Oost-West* en ten Zuiden van het kompas, fig. (3) *a*

$$\alpha = 180°,\ \varphi' = 90°,\ \psi = 90 + \varphi,\ \alpha + \varphi = 180 + \varphi,\ h = 0,\ a = 0;$$

dus, volgens (4):

$$2\, Sin.\varphi = \frac{M}{i}\{(R^{-3}+R'^{-3}+R''^{-3}+R'''^{-3})L Cos.\varphi - (R^{-3}-R'^{-3}-R''^{-3}+R'''^{-3})\varrho Sin.\varphi\};$$

waaruit

$$Tang.\varphi = \frac{\frac{ML}{i}(R^{-3}+R'^{-3}+R''^{-3}+R'''^{-3})}{2+\frac{M\varrho}{i}(R^{-3}-R'^{-3}-R''^{-3}+R'''^{-3})},$$

of

$$Tang.\varphi = \frac{\frac{2ML}{i}\left(1+\frac{\mu+\mu'+\mu''+\mu'''}{4}\right)}{r^3+\frac{2ML}{i}\cdot\frac{\varrho}{L}\left(\frac{\mu-\mu'-\mu''+\mu'''}{4}\right)}$$

en

$$r^3\, Tang.\varphi = \frac{2ML}{i}\left\{1+\frac{\mu+\mu'+\mu''+\mu'''}{4} - \frac{\mu-\mu'-\mu''+\mu'''}{4}\cdot\frac{\varrho\, Tang.\varphi}{L}\right\}.. (6)$$

2° De staaf *Oost-West* en ten Oosten van het kompas fig. (5) *b*

$$\alpha = 90°,\ \varphi' = 90°,\ \psi = 90° + \varphi,\ \alpha + \varphi = 90° + \varphi,\ h = 0,\ a = \varrho\,\mathrm{L}.$$

dus, volgens (4):

$$2\,Sin.\,\varphi = \frac{\mathrm{M}}{i}\left\{(\mathrm{R}^{-3}+\mathrm{R}'^{-3}+\mathrm{R}''^{-3}+\mathrm{R}'''^{-3})\,\mathrm{L}\,Cos.\varphi + (\mathrm{R}^{-3}-\mathrm{R}'^{-3}-\mathrm{R}''^{-3}+\mathrm{R}'''^{-3})\varrho\,Cos.\varphi\right\},$$

en

$$Tang.\,\varphi = \tfrac{1}{2}\,.\,\frac{\mathrm{M}}{i}\left\{(\mathrm{R}^{-3}+\mathrm{R}'^{-3}+\mathrm{R}''^{-3}+\mathrm{R}'''^{-3})\mathrm{L} + (\mathrm{R}^{-3}-\mathrm{R}'^{-3}-\mathrm{R}''^{-3}+\mathrm{R}'''^{-3})\varrho\right\};\ \ldots (7)$$

waaruit

$$r^3\,Tang.\,\varphi = \frac{2\,\mathrm{M\,L}}{i}\left\{\left(1 + \frac{\mu+\mu'+\mu''+\mu'''}{4}\right) + \frac{\mu-\mu'-\mu''+\mu'''}{4}\,.\,\frac{\varrho}{\mathrm{L}}\right\}\ \ldots\ldots (8)$$

Door de invoering der uitdrukkingen *a, b* en *c* van pag. 5, herleid zich de vergelijking (6) tot

$$r^3\,Tang.\,\varphi = \frac{2\,\mathrm{M\,L}}{i}\left\{1 + \frac{15}{2}\,.\,\frac{\mathrm{L}^2\,l^2}{r^4} - 15\,\frac{\varrho^2\,l^2}{r^4} + \frac{45}{2}\left(\frac{\varrho^2\,l^2}{r^4} - \frac{\mathrm{L}^2\,l^2}{3\,r^4}\right)Cos.^2\,\varphi\right\}\ \ldots (6')$$

De vergelijking (8) daarentegen wordt welligt doelmatiger, en genoegzaam even gemakkelijk, in getallen naar den vorm (7) berekend. Hierbij valt op te merken, dat de termen van (8)

$$\frac{\mu+\mu'+\mu''+\mu'''}{4}\ \text{ en }\ \frac{\mu-\mu'-\mu''+\mu'''}{4}\times\frac{\varrho}{\mathrm{L}},$$

voor onbepaald toenemende waarden van ϱ, en dus ook van r, tot grenzen hebben 0 en — 3, zoodat de grenswaarde van (8) is

$$r^3\,Tang.\,\varphi = -\frac{4\,\mathrm{M\,L}}{i};$$

terwijl die van (6) is

$$r^3\,Tang.\,\varphi = +\frac{2\,\mathrm{M\,L}}{i};$$

zoo als overigens overvloedig bekend is.

Ter beproeving der formulen (6) en (8) of liever (6') en (7) heb ik eene sterk gemagnetiseerde staaf, lang 50, breed 4 en dik $1\frac{1}{2}$ centimeters, eerst ten Zuiden en Noorden van een kompas gelegen, in de rigting O—W en W—O, op de achtervolgende afstanden van 0,603, 0,703, 0,802, 1,002, 1,202, 1,401, 1,601 ellen; vervolgens die zelfde staaf ten Oosten en ten Westen van het kompas gelegen, ook in de rigtingen *Oost-West* en *West-*

Oost, op de afstanden van 0,8, 1,0, 1,2 en 1,4 ellen, gerekend van het midden van het kompas tot het midden der staaf. — De door de staaf voortgebragte afwijkingen van het kompas waren de volgende:

1. AFSTANDEN METERS.	2. STAAF TEN ZUIDEN.	3. STAAF TEN NOORDEN	4. GEMIDD AFWIJKING.	5. AFSTANDEN METERS.	6. STAAF TEN OOSTEN.	7. STAAF TEN WESTEN.	8. GEMIDD. AFWIJKING.
0,603	53°,3	53°,4	53°,35				
0,703	42 ,45	42 ,7	52 ,58				
0,802	33 ,0	32 ,3	32 ,65	0,8	60°,45	60°,1	60°,27
1,002	19 ,27	19 ,13	19 ,20	1,0	38 ,55	39 ,1	38 ,82
1,202	11 ,75	11 ,50	11 ,62	1,2	24 ,25	24 ,75	24 ,50
1,401	7 ,55	7 ,35	7 ,45	1,4	15 ,75	15 ,50	15 ,62
1,601	5 ,20	5 ,10	5 ,15				

De afwijkingshoeken in de 2de en 3de, 6de en 7de kolom hierboven geschreven, zijn de *helften* der door de kompasnaald doorloopen hoeken door de omkering der staaf (van O-W tot W-O) verkregen. — De *gedeelten* der graden zijn slechts bij schatting opgemaakt, de verdeeling zelve was die van eene gewone opgeplakte papieren roos.

De afstand van de beide polen der kompasnaald heb ik gevonden zeer nabij 12 centimeters te bedragen, waaruit voor l volgt eene waarde van 0,06 ellen. De kompasnaald zelve was ruitvormig en had eene lengte van 14 centimeters.

Door de toepassing der formule (6′) op de zeven waargenomen afwijkingen, met de staaf ten Zuiden en Noorden van het kompas, heb ik gevonden: met

$$L = 0{,}212 \text{ Meters,} \qquad \text{en met } L = 0{,}202 \text{ Meters,}$$

$$\text{Log.}\left(\frac{2\,M\,L}{i}\right) = 9{,}56937, \qquad \text{Log.}\left(\frac{2\,M\,L}{i}\right) = 956647,$$

Door toepassing der formule (7) is gevonden

$$\text{Met } L = 0{,}212 \ldots \text{Log.}\left(\tfrac{1}{2}\frac{M}{i}\right) = 9{,}63394 \text{ dus Log.}\left(2\,L\,\frac{M}{i}\right) = 9{,}56233$$

$$\text{en met } L = 0{,}202 \ldots \text{Log.}\left(\tfrac{1}{2}\frac{M}{i}\right) = 9{,}66030 \quad \text{,,} \quad \text{Log.}\left(\frac{2\,L\,M}{i}\right) = 9{,}56771.$$

Om de uitkomsten der formulen (6′) en (7) te doen overeenstemmen volgt uit deze getallen, dat men moet nemen, bij $l = 0{,}06$,

$$L = 0{,}2034\,, \qquad \text{Log.}\left(\frac{2\,L\,M}{i}\right) = 9{,}56689 \qquad \text{en Log.}\left(\frac{1}{2}\frac{M}{i}\right) = 9{,}65648.$$

Berekent men met deze getallen de hoeken van afwijking van het kompas, dan komt:

Staaf ten Zuiden of Noorden.

Afstanden . . .	0,603	0,703	0,802	1,002	1,202	1,401	1,601	Meters.
Afwijking . . .	53°22′	42°30′	33°0′	19°14′	11°38′	7°28′	5°3′	Berekend.
〃 . . .	53 21	42 35	32 39	19 12	11 37	7 27	5 9	Waargen.
Ber. — Waarn.	+ 1′	— 5′	+ 21′	+ 2′	+ 1′	+ 1′	— 6	

Staaf ten Oosten of Westen.

Afstanden	0,800	1,000	1,200	1,400	Meters.
Afwijking	60°6′	39°5′	24°17′	15°36′	Berekend.
〃	60 16	38 49	24 30	15 37	Waargen
Ber. — Waarn. . .	— 10′	+ 16′	— 13′	— 1′	

De som der waarnemingsfouten der 11 hoeken beloopt + 7′, gemidd. + 0′,6. De middelbare fout eener waarneming . . . . is ± 11′.

Het komt mij voor, dat deze uitkomsten de onderstelling van *twee* poolpunten in regelmatig gemagnetiseerde staven genoegzaam regtvaardigen. De fouten der groote afwijkingshoeken zijn niet aanmerkelijker, dan die der kleine, en geheel binnen de grenzen die men onder de gegevene omstandigheden verwachten mogt: eene opgeplakte papieren roos, waarvan de fouten van verdeeling minstens ½ graad beloopen kunnen, en in het algemeen bij ver afgelegene *verdeelstrepen* ± 1° bedragen; eene aflezing bij schatting der onderdeelen van graden, ieder ter grootte van $1\frac{1}{6}$ millimeter; verder de fouten uit een niet volkomen op den juisten afstand plaatsen der magneetstaaf enz. Desniettemin kan de lengte van L niet grooter of kleiner aangenomen worden, zonder de fouten met de staaf Z of N, *of die* met de staaf O of W van het kompas merkelijk te vergrooten.

Gaan wij over tot de beschouwing van het *Intensiteits* kompas; zij, fig. 4, N Z eene horizontaal vrij opgehangen magneetnaald; N′ Z′ eene andere, met haar midden vertikaal onder of boven het midden der eerste naald, zoodat tusschen deze naalden geen ander verband bestaat dan de wederkeerige magnetische werkingen. Wij behoeven nu slechts in de formulen (2) en (3) of (4) en (5) de afstand $\varrho = 0$ te stellen, dan komt:

$$c = p = -p' = p'' = -p''' = \frac{\mathrm{L}\,l}{r^2} Cos.\,\psi; \quad a = b = 0;$$

$$\frac{\mu + \mu' + \mu'' + \mu'''}{4} = \frac{3\,.\,5}{1\,.\,2} c^2 + \frac{3\,.\,5\,.\,7\,.\,9}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} c^4 + \frac{3\,.\,5\,.\,7\,.\,9\,.\,11\,.\,13}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6} c^6 + \text{enz.}$$

of

$$q = \frac{3.5}{1.2} \cdot \frac{\mathrm{L}^2\, l^2}{r^4} Cos.^2\,\psi + \frac{3.5.7.9}{1.2.3.4} \frac{\mathrm{L}^4\, l^4}{r^8} Cos.^4\,\psi + \frac{3.5.7.9.11.13}{1,2.3.4.5.6} \cdot \frac{\mathrm{L}^6\, l^6}{r^{12}} Cos.^6\,\psi + \text{enz.} \quad . \;(9)$$

$$r^3\, Sin.\,\varphi = \frac{2\,\mathrm{M\,L}}{i}(1 + q)\, Sin.\,\psi, \quad . \; r^3\, Sin.\,\varphi' = \frac{2\,m\,l}{i}(1 + q)\, Sin.\,\psi \; . \; . \; . \;(10)$$

waarbij

$$r^2 = h^2 + \mathrm{L}^2 + l^2, \qquad \psi = \varphi + \varphi'.$$

De formulen (10) bevatten in zich al de theorie van het Intensiteits-kompas; zij bevatten ook de theorie van het kompas van WALKER, en het bewijs waarom dit laatste niet aan het voorgestelde doel kan beantwoorden. De eenvoudige opmerking, dat de hoeken φ en φ' en hunne som ψ', bij onveranderde liniaire afmetingen die in de uitdrukkingen voorkomen, *alleen van de intensiteit i* afhangen, en geenszins van de *rigting* dier kracht, is genoegzaam, om het onvoldoende van het kompas van WALKER aan te wijzen.

Uit (10) volgt, in de eerste plaats, de evenredigheid:

$$Sin.\,\varphi : Sin.\,\varphi' = (2\,\mathrm{M\,L}) : (2\,m\,l).$$

Dat is: De *Sinussen* der afwijkingshoeken zijn altijd in eene standvastige verhouding tot elkander, en wel omgekeerd evenredig aan de magnetische momenten der beide naalden.

Aan (10) kan men in het algemeen voldoen door $Sin.\,\varphi = Sin.\,\varphi' = Sin.\,\psi = 0$ te nemen. Hieruit volgt dat de beide naalden in het algemeen een evenwigts stand hebben in den meridiaan, beide naar het Noorden, of beide naar het Zuiden, of de eene naar het Noorden, de andere naar het Zuiden gerigt. Deze standen van evenwigt zijn echter niet altijd stabiel; de eerste is het slechts wanneer r groot genoeg is; de tweede nimmer, de derde als r klein genoeg is, en één der naalden een sterker magnetisch moment heeft dan de andere; deze sterkere naald rigt zich dan naar het Noorden.

Wanneer wij ons eenen driehoek A B C, fig. 5, voorstellen waarvan de zijden A B, B C en A C evenredig zijn aan 1, $\frac{2\,\mathrm{M\,L}}{i\,.\,r^3}$ $(1 + q)$ en $\frac{2\,m\,l}{i\,.\,r^3}$ $(1 + q)$ dan zullen de hoeken A, B, C van dezen driehoek gelijk zijn aan de hoeken φ, φ' en $180^\circ - \psi$; en het is ligt uit deze beschouwing de voorwaarden

te vinden wanneer andere evenwigts standen dan die in den meridiaan *stabiel* plaats vinden. Zij aangenomen $ML > ml$ dan moet hiertoe

$$\left.\begin{array}{l}\frac{2\,ML}{i\,.\,r^3}(1+q)+\frac{2\,ml}{i\,.\,r^3}(1+q)>1,\\ \text{en}\\ \frac{2\,ML}{i\,.\,r^3}(1+q)-\frac{2\,ml}{i\,.\,r^3}(1+q)<1 \text{ zijn.}\end{array}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(11)$$

Wanneer r zeer groot, of groot genoeg is, heeft de eerste voorwaarde niet plaats; wanneer r klein, of klein genoeg is, is daarentegen de tweede voorwaarde niet vervuld; dit zijn de gevallen, die wij boven noemden, wanneer alleen evenwigts standen in den meridiaan kunnen plaats hebben. Is $ml = ML$ (zonder het geringste verschil) dan heeft de tweede ongelijkheid altijd plaats, en dus zoude er dan voor eene *kleine* waarde van r, wanneer ook de eerste voorwaarde vervuld is, geen stabiel evenwigtsstand in den meridiaan plaats vinden. Dit echter kan niet verwezenlijkt worden omdat er, streng genomen, altijd verschil tusschen ML en ml zijn zal.

Stellen wij,

$$2\,ML + 2\,ml = A,$$

en

$$2\,ML : 2\,ml = 1+\alpha : 1-\alpha,$$

of

$$\left.\begin{array}{l}2\,ML = \tfrac{1}{2}A(1+\alpha),\\ 2\,ml = \tfrac{1}{2}A(1-\alpha).\end{array}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12)$$

dan is A een standvastig magnetisch moment, en α een klein standvastig getal voor het stelsel der beide naalden, zoo lange deze onveranderd dezelfde magnetische krachten behouden, en men vindt:

$$Sin.\,\varphi : Sin.\,\varphi' = 1+\alpha : 1-\alpha,$$

waaruit

$$Tang.\,\tfrac{1}{2}(\varphi-\varphi) = \alpha\, Tang.\,\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi) = \alpha\, Tang.\,\tfrac{1}{2}\psi;$$

verder

$$i\,(Sin.\,\varphi + Sin.\,\varphi') = \frac{2\,ML + 2\,ml}{r^3}(1+q)\,Sin.\,(\varphi+\varphi');$$

waaruit

$$i = \frac{2\,ML+2\,ml}{r^3}(1+q)\frac{Cos.\,\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi')}{Cos.\,\tfrac{1}{2}(\varphi-\varphi')},$$

of

$$i = \frac{A}{r^3}(1+q)\frac{Cos.\,\tfrac{1}{2}\psi}{Cos.\,\tfrac{1}{2}(\varphi-\varphi')}.$$

Zij nog

$$Cos. \beta = (1 + q) \frac{Cos. \frac{1}{2} \psi}{Cos. \frac{1}{2} (\varphi - \varphi')} \text{ gesteld,}$$

dan heeft men ter bepaling van de intensiteit i, overeenkomende met eenen hoek ψ tusschen de beide naalden, het volgende stel vergelijkingen:

$$\left.\begin{aligned} Tang. \tfrac{1}{2} (\varphi - \varphi') &= \alpha \, Tang. \tfrac{1}{2} \psi, \\ Cos. \beta &= (1 + q) \frac{Cos. \frac{1}{2} \psi}{Cos. \frac{1}{2} (\varphi - \varphi')}, \\ i &= \frac{A}{r^3} Cos. \beta. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

Cos. β is in het algemeen grooter dan *Cos.* $\frac{1}{2} \psi$, dus $\beta < \frac{1}{2} \psi$ maar als de naalden weinig in magnetisch moment verschillen, zoo als wij onderstellen, dan is ook het verschil tusschen β en $\frac{1}{2} \psi$ doorgaande gering, althans wanneer de afstand tusschen de beide naalden niet te klein is. Men ziet dus dat de intensiteit i *ongeveer* evenredig is *aan den Cosinus van den halven hoek tusschen de naalden.*

α en A, gelijk ook L en l moeten voor ieder intensiteits-kompas door waarneming bepaald worden. Wat α betreft, de eenvoudigste wijze om deze grootheid te vinden is, dat men voor zekeren stand der naalden (fig. 4) de hoeken waarneemt welke elke naald met eene willekeurig gekozen middellijn maakt; dat men daarna, door middel van een magneetstaafje, of anderzins, de stellingen der naalden verandert, zoodanig dat N′ naar het Westen en N naar het Oosten afwijkt; en dan, — nadat de naalden weder in rust gekomen zijn, — nogmaals de stellingen waarneemt welke de naalden ten opzigte van dezelfde willekeurig gekozen middellijnen maken. De *helften* der door de naalden doorloopen hoeken, zijn dan gelijk aan φ en aan φ'; waarna α gevonden wordt, door de vergelijking

$$\alpha = \frac{Tang. \frac{1}{2} (\varphi - \varphi')}{Tang. \frac{1}{2} (\varphi + \varphi')}.$$

Deze waarneming kan doelmatig herhaald worden, nadat de afstand der naalden vermeerderd of verminderd is, waardoor zoowel φ als φ' andere waarden erlangen. — Het spreekt van zelf, dat voor eene goede bepaling van α de afstand der naalden niet zoo mag gekozen worden, dat φ en φ' digt bij 0 of 180° vallen. Door dezelfde waarnemingen, wanneer men de afstand h der

naalden heeft laten veranderen, kan ook L, l en A gevonden worden. Wat L en l betreft, indien de beide naalden van gelijke grootte en gedaante zijn, dan is er geene reden om L verschillend van l aan te nemen, hetgeen alleen het gevolg van eene ongelijkvormige magnetisering zoude kunnen zijn. Zeker is het dus, dat in het geval van naalden met gelijke afmetingen, zoo als wij onderstellen, L en l zeer weinig verschillen zullen, en dat men gerustelijk $L = l$ zal mogen nemen; te eer nog, omdat een klein verschil, genoegzaam onmerkbaar in de uitkomsten zal blijven, wanneer naar die uitkomsten eene gemiddelde waarde van L bepaald wordt. Wij hebben dus nog:

$$q = \frac{3.5}{1.2}\left(\frac{L}{r}\right)^4 Cos.^2\psi + \frac{3.5.7.9}{1.2.3.4}\left(\frac{L}{r}\right)^8 Cos.^4\psi + \frac{3.5.7.9.11.13}{1.2.3.4.5.6}\left(\frac{L}{r}\right)^{12} Cos.^6\psi + \text{enz.}$$

en

$$r^2 = h^2 + 2\,L^2.$$

De waarde van α is bekend. Nu neme men voor de gedane reeks waarnemingen eene waarde voor L aan, die waarschijnlijk voorkomt, iets minder dan de halve lengte der naalden, en berekene daarmede voor elke waarneming $q, \frac{1}{2}(\varphi - \varphi')$ en β en dan de vergelijking

$$\frac{A}{i} = r^3\, Sec.\,\beta = (h^2 + 2\,L^2)^{\frac{3}{2}}\, Sec.\,\beta.$$

Indien de gedane keuze voor L de juiste is, dan moet elke waarneming dezelfde (of nagenoeg dezelfde) waarde voor $\frac{A}{i}$ geven. Is dit het geval niet, dan neme men eene andere waarde voor L aan, en herhale de berekening. Een klein getal beproevingen is voldoende, om L zoodanig te bepalen, dat de overblijvende fouten zoo klein mogelijk worden.

Na deze bepaling der constanten is het ligt en doelmatig om voor eenige waarden van h, tafeltjes te maken waarin voor eenigen hoek ψ de waarde van $\frac{1}{2}\psi - \beta$ gevonden wordt, zoodat men ligtelijk $\beta = \frac{1}{2}\psi - (\frac{1}{2}\psi - \beta)$ kan vinden en daarna i berekenen. Men zoude ook eene tafel met twee argumenten h en ψ kunnen maken, welke onmiddellijk i gaf. De eenheid dezer grootheid zoude dan wezen de horizontale intensiteit op de plaats en den dag of het uur der gedane waarnemingen ter bepaling van α, A, L.

Tot toepassing der gevonden formulen diene de volgende waarnemingen gedaan met twee eenvoudige kompasnaalden, voorzien van gewone papieren

rozen. Zij waren besloten in een eenvoudig houten kastje, van voren en van boven door glas gesloten, zoodat de stellingen der naalden gezien kon worden. Een vertikaal loopende draad diende om de verdeelingen te kunnen aflezen. De lengte der naalden = 141 mm., breedte = 11 mm., dikte = 2 mm. Zij lagen plat, dat is met de breede zijden horizontaal.

Ik heb, op vijf verschillende hoogten der naalden boven elkander, de afwijkingshoeken φ' en φ op boven beschreven wijze, waargenomen, en de volgende uitkomsten bekomen:

AFSTAND DER NAALDEN.	ONDER-ROOS φ'	BOVEN-ROOS φ	$\frac{1}{2}$ SOM $\frac{1}{2}(\varphi' + \varphi)$	$\frac{1}{2}$ VERSCHIL $\frac{1}{2}(\varphi' - \varphi)$
mm				
185	10°,03	9°,25	9°,64	0°,39
175	24 ,64	21 ,78	23 ,21	1 ,43
165	38 ,25	33 ,42	35 ,83	2 ,41
155	48 ,17	41 ,10	44 ,63	3 ,53
145	56 ,62	47 ,35	51 ,98	4 ,64

Wanneer men uit de getallen der beide laatste kolommen de waarde van α bepaalt, naar aanleiding der formule

$$Tang.\tfrac{1}{2}(\varphi' - \varphi) = \alpha \times Tang.\tfrac{1}{2}(\varphi' + \varphi),$$

vindt men zeer nabij $\alpha = 0{,}06165$, Log. $= 8{,}78993$; met de volgende verschillen tusschen de berekening en de waarneming,

$\frac{1}{2}(\varphi' - \varphi)$ berekening	0°35′	1°31′	2°33′	3°29′	4°30′
〃 waarneming . . .	0 23	1 26	2 25	3 32	4 38
fouten	+ 12′	+ 5′	+ 8′	— 3′	— 8′

Er blijft nu nog over om de waarde van L te vinden of den afstand der polen van het midden der naalden. Ik heb gevonden dat L = 63 mm. = 0,63 decimeter, en dus $r = \sqrt{h^2 + 2 \times (0{,}63)^2}$, op de volgende wijze voldoet aan de formule:

$$\frac{i}{A} = \frac{1+q}{r^3} \cdot \frac{Cos.\frac{1}{2}(\varphi' + \varphi)}{Cos.\frac{1}{2}(\varphi' - \varphi)},$$

nemende den decimeter als éénheid.

AFSTAND DER NAALDEN.	r	$\frac{i}{A}$	
1,85	2,053	0,1207	
1,75	1,963	0,1263	
1,65	1,875	0,1242	gemiddeld = 0,1245.
1,55	1,788	0,1248	
1,45	1,700	0,1266	

De gevonden uitkomsten zijn, met het oog op de zeer gewone constructie van het werktuig, naar het mij voorkomt, voldoende om, zoo ver zij vermogen, de theorie te bevestigen. De eerste waarneming op 185 mm. afstands der naalden, wijkt iets meer af dan de overige: toch is 12′ of $\frac{1}{5}$ graad, minder dan $\frac{1}{5}$ mm., bij een schatting der verdeeling, niet veel. — Bij de gevonden waarden voor $\frac{i}{A}$ is nog eene andere oorzaak van waarnemingsfouten aanwezig, te weten de onzekerheid in de bepaling van den afstand der naalden, welke gewis tot ongeveer 0,5 à 0,7 streep bedroeg. Sluit men de eerste waarneming — die op 185 mm. afstands der rozen — uit, dan komt voor de gemiddelde waarde van $\frac{i}{A}$ . . . 0,1255 ± 0,0006 (*m. b. f.*) en dan is

$$i = 7{,}9682 \,.\, \frac{1+q}{r^3} \,.\, \frac{Cos. \frac{1}{2}(\varphi+\varphi')}{Cos. \frac{1}{2}(\varphi'-\varphi)}.$$

Neemt men voor h eene standvastige waarde b. v. 1,65 decim. dan wordt

$$1+q = 1 + 0{,}09556\, Cos.^2 (\varphi+\varphi') + 0{,}00508\, Cos.^4 (\varphi'+\varphi)$$

en

$$i = 1{,}2082\,(1+q)\,\frac{Cos. \frac{1}{2}(\varphi'+\varphi)}{Cos. \frac{1}{2}(\varphi'-\varphi)}.$$

De eenheid in deze laatste uitdrukking is de horizontale intensiteit van het aardmagnetismus te Amsterdam (in November 1858).

Men kan ook, in plaats van de formulen (13), i onmiddellijk in de gegevens uitdrukken, aldus:

$$i = \frac{A}{r^3} Cos. \tfrac{1}{2}\psi \left(1+\alpha^2 Tg.^2 \tfrac{1}{2}\psi\right)^{\frac{1}{2}} \left\{1 + \frac{3.5}{1.2}\left(\frac{L}{r}\right)^4 Cos.^2\psi + \frac{3.5.7.9}{1.2.3.4}\left(\frac{L}{r}\right)^8 Cos.^4\psi + \text{enz.}\right\}. \quad (14)$$

$$= \tfrac{1}{2} \,.\, \frac{A}{r^3} Cos. \tfrac{1}{2}\psi \left(1+\alpha^2 Tang.^2 \tfrac{1}{2}\psi\right)^{\frac{1}{2}} \left\{\left(1+2\left(\frac{L}{r}\right)^2 Cos.\psi\right)^{-\frac{3}{2}} + \left(1-2\left(\frac{L}{r}\right)^2 Cos.\psi\right)^{-\frac{3}{2}}\right\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\; \frac{A}{r^3} \left(Cos.^2 \tfrac{1}{2}\psi + \alpha^2 Sin.^2 \tfrac{1}{2}\psi\right)^{\frac{1}{2}} \left\{\left(1+2\left(\frac{L}{r}\right)^2 Cos.\psi\right)^{-\frac{3}{2}} + \left(1-2\left(\frac{L}{r}\right)^2 Cos.\psi\right)^{-\frac{3}{2}}\right\}$$

Deze laatste uitdrukking is geschikt om de grenzen te bepalen, binnen welke de afstand der beide naalden, voor eene gegevene waarde van i, bepaald moet blijven. Aan de bovenste grens, wanneer beide naalden nog Noord wijzen, heeft men $\psi = 0$, dan is

$$i = \frac{1}{2} \cdot \frac{A}{r'^3} \left\{ \left(1 + 2\left(\frac{L}{r'}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}} + \left(1 - 2\left(\frac{L}{r'}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}} \right\}.$$

Aan de onderste grens, waar de eene naald Zuid, de andere Noord wijst, heeft men $\psi = 180°$, en dan is

$$i = \frac{1}{2} \alpha . \frac{A}{r''^3} \left\{ \left(1 - 2\left(\frac{L}{r''}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}} + \left(1 + 2\left(\frac{L}{r''}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}} \right\}.$$

De waarde van r' wordt uit de eerste vergelijking ligt gevonden door de opmerking dan $\left(\frac{L}{r'}\right)^2$ een klein gebroken is, dat men bij eene eerste benadering kan verwaarloozen, waaruit benaderend volgt

$$r' = \sqrt[3]{\frac{A}{i} + 7,5 \left(\frac{i}{A}\right)^{\frac{1}{3}} L^4} \quad , \quad h' = \sqrt{r'^2 - 2 L^2}. \quad \ldots\ldots\ldots (15)$$

In de tweede vergelijking is h of de afstand der naalden klein, dus $\left(\frac{L}{r''}\right)^2$ nabij gelijk aan $\frac{1}{2}$, zoodat $\left(1 - 2\left(\frac{L}{r''}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}}$ groot is. Zij in dit geval $\frac{h''}{L} = x\sqrt{2}$; hierdoor verandert de laatste vergelijking in:

$$i = \frac{A\alpha}{4 L^3 \sqrt{2}.} \left\{ \frac{1}{x^3} + \frac{1}{(2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \right\}$$

Verwaarloozende hierin x, in den tweeden term van het tweede lid, komt:

$$i = \frac{A\alpha}{4 L^3 \sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{x^3} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right\} = \frac{A\alpha}{4\sqrt{2}} . \frac{1}{x^3 L^3} + \frac{A\alpha}{16 L^3} = \frac{A\alpha}{2h''^3} + \frac{A\alpha}{16 L^3}$$

dus is benaderend:

$$\frac{2i}{A\alpha} = \frac{1}{h''^3} + \frac{1}{8 L^3}$$

en

$$h'' = \frac{\sqrt[3]{\frac{A\alpha}{2i}}}{\sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{8} . \frac{A\alpha}{2i} \times \frac{1}{L^3}\right)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

h' en h'' zijn dan de grenzen, binnen welke de afstand der beide naalden moet vallen; men ziet dat zij meer verwijderd zijn naarmate de horizontale intensiteit i kleiner is, en ook naarmate de naalden sterker gemagnetiseerd zijn: want h'' is, bij bijna gelijke naalden, altijd klein.

Stellen wij nog $\psi = 90°$, dan volgt uit (14)

$$i = \frac{A}{r'''^3 \sqrt{2}} \sqrt{1 + \alpha^2},$$

en dus

$$r''' = (1 + \alpha^2)^{\frac{1}{6}} \sqrt[3]{\frac{A}{i\sqrt{2}}}, \qquad h''' = \sqrt{r'''^2 - 2L^2}, \ldots\ldots\ldots (17)$$

op de hoogte h''' maken de naalden eenen regten hoek met elkander, ieder nagenoeg 45° met den meridiaan.

Onder de standen, welke de naalden kunnen aannemen, is nog een merkwaardige stand, te weten deze, dat de zwakkere naald NZ (fig. 6) zich regthoekig aan den meridiaan rigt, terwijl de sterkere N′Z′ eenen kleineren hoek met den meridiaan maakt. Deze laatste hoek AMN′ heeft alsdan eene waarde *maximum*. Dit volgt uit de vergelijking

$$Sin.\, \varphi' = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} Sin.\, \varphi,$$

Want differentiëerende, vindt men:

$$d\varphi' = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \cdot \frac{Cos.\, \varphi}{Cos.\, \varphi'} \cdot d\varphi = \frac{Tang.\, \varphi'}{Tang.\, \varphi} \cdot d\varphi$$

en

$$d^2\varphi' = \frac{Tang.\, \varphi'}{Tang.\, \varphi} d^2\varphi + \left(\frac{Tang.^3\, \varphi'}{Tang.^2\, \varphi} - Tang.\, \varphi'\right) d\varphi^2.$$

waaruit voor $\varphi = 90°$ en $\varphi' < 90°$
noodwendig volgt $d\varphi' = 0$ en $d^2\varphi' =$ negatief, dus φ' een *maximum*.

Nog eenvoudiger, of liever aanschouwlijker kan men tot dit besluit komen, door de bekende eigenschap, dat de *toppunten* van driehoeken, op de zelfde basis beschreven, en waarvan de opstaande zijden eene *standvastige* verhouding tot elkander hebben, in eenen *cirkel-omtrek* gelegen zijn, hier toe te passen. Zij PRQ (fig. 7) de helft van dien cirkel, de meetkundige plaats der hoekpunten C van den driehoek ABC (van fig. 5), wanneer de zijden AC en BC veranderen, onder de voorwaarde van *dezelfde* betrekking te behouden; en trekken wij de raaklijn BR, dan is ABR blijkbaar

een *maximum*, de grootste waarde van φ'; terwijl het ligt is aan te wijzen, dat dan RAB $= \varphi = 90°$ is. Fig. 7 geeft dus eene aanschouwelijke voorstelling van het verloop der afwijkingshoeken der beide naalden, van het oogenblik af, dat beide nog Noord wijzen, φ en $\varphi' = 0$ zijn, tot het oogenblik toe, dat φ' weder $= 0$ en $\varphi' = 180°$ is geworden.

De hoeken in fig. (6) zijn dus

$$\varphi = 90°, \quad \text{en} \quad Sin.\,\varphi' = \frac{1-\alpha}{1+\alpha},$$

Voor het Intensiteits-Kompas hebben wij aangenomen, dat beide de naalden genoegzaam even sterk zijn, en dus dat α een klein getal is. Zoo wij daarentegen onderstellen, dat er een merkelijk verschil in magnetisch vermogen tusschen de naalden bestaat, en dus dat α grooter dan $\frac{1}{3}$ is, dan zal in fig. 6 de hoek φ' niet groot, zelfs klein kunnen zijn. Wanneer de naalden aan draden hangen en op de gewone wijze van spiegeltjes voorzien zijn, dan zoude het zoo kunnen ingerigt worden, dat men gelijktijdig de veranderingen van rigting en intensiteit in denzelfden kijker konde waarnemen. Eene verandering van rigting der magnetische kracht doet *beide* naalden eene gelijke hoeveelheid draaijen; eene verandering van intensiteit heeft alleen invloed op den hoek $\psi = \varphi + \varphi'$.

Bij eene ophanging aan draden is er eene moeijelijkheid, (indien, zoo als noodig schijnt, elke naald aan eenen afzonderlijken draad zal hangen,) om de middelpunten der naalden vertikaal boven elkander te bekomen en niet iets meer dan de halve horizontale breedte der naalden verwijderd; maar behalve dat men de naalden met de smallere kanten (zoo deze er zijn) naar boven kan hangen, zoo is zulk een volkomen vertikaal boven elkander hangen der middelpunten niet volstrekt noodwendig. De voorgedragen formulen (4) en (5) bevatten in zich de correctiën, welke uit eene kleine waarde van ϱ moeten voortvloeijen *.

---

* Bij deze wijze om gelijktijdig de verandering van rigting en van intensiteit der horizontale magnetisehe kracht waar te uemen, zoude men zich ook van een onveranderde afstand der naalden boven elkander moeten verzekeren, iets, dat bij rekbare draden niet wel aangenomen kan worden. De mogelijke veranderingen in den vertikalen afstand laten zich echter ligt onderzoeken, door b. v. de naalden aan vertikale koperen stangen CM en DM′ (fig. 6*) te verbinden, welke aan draden hangen; en door op die stangen, op gelijke hoogte, twee merken E en F te maken, waarop een horizontaal mikroskoop PQ, dat b.v. op- en nedergeschroefd kan worden, kan gerigt zijn. De veranderingen in het verschil der hoogte MM′ kunnen aldus ligt worden nagegaan.

In geval

$$\varphi = 90^\circ \text{ en dus } Sin.\,\varphi' = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \text{ is,}$$

heeft men ook

$$\psi = 90 + \varphi' \quad ; \quad Cos.\,\psi = -\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\,,$$

en alzoo, volgens (14)

$$i = \tfrac{1}{2}\,\frac{A\sqrt{\alpha}}{r^3}\left\{\left(1 - 2\,\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\left(\frac{L}{r}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(1 + 2\,\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\left(\frac{L}{r}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right\}$$

$$= \frac{A\sqrt{\alpha}}{r^3}\left\{1 + \frac{3.5}{1.2}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^2\left(\frac{L}{r}\right)^4 + \frac{3.5.7.9}{1.2.3.4}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^4\left(\frac{L}{r}\right)^8 + \text{enz.}\right\} \;.\;.\; (18)$$

Dit geeft aanleiding tot nog eene andere inrigting voor een intensiteits-kompas, te weten met eenen standvastigen hoek $\psi = 90 + \varphi'$ tusschen de naalden, en eene standvastige afwijking φ' der sterkere naald — naar het Oosten of Westen — maar eene *veranderlijke* hoogte der naalden boven elkander. Eene inrigting, die gemakkelijk is te maken, en waarbij dan telkens voor het waarnemen van i, de zwakkere naald *op-* of *neder-*geschroefd, dat is verplaatst zoude moeten worden, tot zij den gevorderden hoek ψ met de sterkere maakte, en hoogte h op eene verdeeling afgelezen moest worden.

Wanneer de sterkere naald steeds naar dezelfde zijde (O of W) van den meridiaan afweek, dan zoude zij van eene roos voorzien kunnen worden, die het Noorden goed aanwees; de rigting der zwakkere naald zoude dan volgens die roos steeds O—W moeten zijn. — Het is duidelijk, dat in dit geval het verschil in magnetisch vermogen niet meer klein, maar eenigzins aanmerkelijker zoude moeten wezen, en dat men daartoe aan de zwakkere naald ook eene mindere lengte dan aan de sterkere zoude kunnen geven, even als bij het kompas van WALKER. Het komt mij evenwel voor, dat dit tweede stelsel voor een Intensiteits-Kompas meerdere practische bezwaren zoude opleveren dan het eerste, omdat de zwakkere naald zeer moeijelijk, bij eenige beweging van het schip, in rust zoude komen, en ligtelijk van N naar Z zoude kunnen doorslingeren, mogelijk geheel omdraaijen; waardoor dan weder de sterkere van O naar W zoude gaan afwijken enz. Beter ware het welligt, bij dit stelsel van naalden van eenig merkelijk verschil van vermogen, zich te bepalen tot de waarneming van de hoogte h' (15), waar nog beide naalden Noord aanwezen, en van de hoogte h'' (16), waarbij de zwakkere *geheel*

omgekeerd lag. Bij eene merkelijke waarde van α liggen deze grenzen nabij elkander, en eene gemiddelde zoude voor de hoogte kunnen genomen worden, die in (18) ter bepaling van i zoude moeten dienen.

Het voornaamste doel, waarvoor het Intensiteits-Kompas, naar ik hoop, zal kunnen aangewend worden, is de bepaling der afwijkingen van het gewoon kompas aan boord van *ijzeren* schepen, vooral bij zulke omstandigheden, wanneer geene waarnemingen van hemellichten of ver verwijderde aardsche voorwerpen gedaan kunnen worden, en voor bepalingen van de horizontale intensiteit van het aard-magnetismus op zeereizen met houten schepen. Om dit te kunnen doen zijn er formulen noodig, ten einde uit waargenomen hoeken tusschen de beide naalden de afwijkingen van het kompas te kunnen berekenen. — Wat het tweede gedeelte betreft, om op een houten schip de horizontale intensiteit van het aardmagnetismus te vinden, hiertoe zijn de vergelijkingen (13) of (14) voldoende, zoo er op het houten schip hoegenaamd geen magnetischen invloed van het ijzerwerk op het kompas bestaat: is dit het geval niet, dan verkeert men eigenlijk weder in hetzelfde geval als met een ijzeren schip, alleen met dit verschil, dat de invloed van het ijzerwerk veel geringer is. — Bepalen wij ons dus tot het ijzeren schip.

Ter herinnering en gemaksbalve worden hier overgeschreven de formulen (8) (9) en (12) uit de Verhandeling *over de afwijkingen van het kompas,* vroeger door de Akademie onder hare werken opgenomen. Zij A, B, C D, E, F; G, H, K, negen grootheden, standvastige getallen, die alleen betrekking hebben tot het geïnduceerde magnetismus; P, Q, R drie krachten van het permanente of subpermanente magnetismus van het ijzer, werkende op de Noordpool (het Noordeinde) der kompasnaald: P naar den voorsteven, Q naar stuurboordzijde en R, evenwijdig aan de mast, nederwaarts; alles voor de plaats, waar het kompas gesteld is. Voorts i de horizontale intensiteit van het aardmagnetismus, en δ de helling of inclinatie der vrij hangende naald, buiten invloed van ijzer. Eindelijk $h =$ de overhelling van het schip, over stuurboordzijde, $b =$ de indomping van den voorsteven; $a =$ de werkelijk miswijzende koers van het schip; $a' =$ de schijnbare, of door het afwijkende kompas aangewezen koers, en $\varphi = a' - a$ de afwijking, gerekend positief

naar het Westen, terwijl a en a' gerekend worden van het Noorden, Oost-om tot 360° toe, dan heeft men, formulen (8).

$$N = \tfrac{1}{2}\{2+A+E-(H+F)\,Sin.\,h-(C+G)\,Sin.\,b\} = N_0 + N_1\,Sin.\,h + N_2\,Sin.\,b,$$

$$r = -\frac{D-B+(C-G)\,Sin.\,h+(H-F)\,Sin.\,b}{2N} = r_0 + r_1\,Sin.\,h + r_2\,Sin.\,b,$$

$$m = -\frac{C\,Tg.\,\delta+\frac{P}{i}+B\,Tg.\,\delta\,Sin.\,h+\left((A-K)\,Tg.\,\delta-\frac{R}{i}\right)Sin.\,b}{N} = m_0+m_1\,Sin.\,h+m_2\,Sin.\,b,$$

$$n = -\frac{F\,Tg.\,\delta+\frac{Q}{i}+\left((E-K)\,Tg.\,\delta-\frac{R}{i}\right)Sin.\,h+B\,Tg.\,\delta\,Sin.\,b}{N} = n_0+n_1\,Sin.\,h+n_2\,Sin.\,b,$$

$$p = -\frac{A-E+(H+F)\,Sin.\,h-(C+G)\,Sin.\,b}{2N} = p_0+p_1\,Sin.\,h+p_2\,Sin.\,b,$$

$$q = -\frac{D+B-(C+G)\,Sin.\,h-(H+F)\,Sin.\,b}{2N} = q_0+q_1\,Sin.\,h+q_2\,Sin.\,b.$$

Verder heeft men de formulen (9).

$$\left.\begin{aligned} 0 &= -Sin.\,\varphi+r\,Cos.\,\varphi+m\,Sin.\,(a+\varphi)+n\,Cos.\,(a+\varphi)+p\,Sin.\,(2a+\varphi)+q\,Cos.\,(2a+\varphi) \\ \frac{R}{Ni} &= Cos.\,\varphi+r\,Sin.\,\varphi-m\,Cos.\,(a+\varphi)+n\,Sin.\,(a+\varphi)-p\,Cos.\,(2a+\varphi)+q\,Sin.\,(2a+\varphi) \end{aligned}\right\}.(9')$$

en nog de formulen (12).

$$\left.\begin{aligned} Tang.\,\alpha &= \frac{r+p\,Sin.\,2a'+q\,Cos.\,2a'}{1+p\,Cos.\,2a'-q\,Sin.\,2a'} \\ Sin.\,(\varphi-\alpha) &= \frac{m\,Sin.\,a'+n\,Cos.\,a'}{1+p\,Cos.\,2a'-q\,Sin.\,2a'}\,Cos.\,\alpha \end{aligned}\right\}\,\ldots\ldots\ldots\,(12')$$

De gewone wijze ter bepaling der coëfficienten m,n,p enz. is, dat bij verschillende koersen a de afwijkingen φ bepaald worden, waarna, met behulp der eerste uitdrukking (9') hierboven, die coëfficienten gemakkelijk gevonden worden: Het nu op te lossen voorstel is, om uit de waarneming van grootheden, die *evenredig* zijn aan R, overeenstemmende met de *schijnbare* koersen a', die zelfde coëfficienten te bepalen. — De zaak is in het algemeen mogelijk, met uitzondering van de kleine grootheid r, welke aldus niet gevonden kan worden, want stellende $r = Tang.\,x$, en vermeerderende alle de hoeken a met x, waardoor φ overgaat in $\varphi' = \varphi - x$, dan verkrijgt men eene

formule, waarvan het eerste lid $\frac{R}{Ni}$ *Cos.* x is, en het tweede lid volkomen dezelfde gedaante heeft als het tweede lid van $\frac{R}{Ni}$ (9'), waarin den term r *Sin.* φ zoude ontbreken. Bij de onbekende waarde van i op de plaats der waarneming, kan dus x niet bepaald worden. Wij behoeven evenwel de vraag, zonder practisch nut, niet moeijelijker maken, en mogen daartoe *à priorie* de waarde der grootheden r, p, q als *bekend* aannemen. Deze grootheden toch zijn, zoo als in de aangehaalde verhandeling is aangetoond, genoegzaam standvastig, en moeten eens vooral (of meermalen, om een gemiddelde te kiezen) in eene haven bepaald worden, op de gewone wijze, door het doen rondzwaaijen van het schip. — r, p, q dus bekend zijnde moeten nog alleen m en n gevonden worden.

Wij onderstellen, dat het schip verschillende koerzen gestevend heeft, en dat men daarbij meermalen den hoek ψ tusschen de beide naalden van het intensiteits-kompas heeft opgeteekend, voor eenen standvastigen afstand der naalden boven elkander. Dat dus voor eene niet te uitgebreide plek van de oppervlakte der aarde, voor verschillende koersen a' volgens het intensiteits-kompas zelf, de hoeken β der form. (13) gevonden zijn. De koersen a' van het intensiteits-kompas vindt men ligt, door op te merken, dat het Noorden van dat kompas gelegen is bijna *midden* tusschen de noordeinden der beide naalden, en juist een Boog, *Tang.* $= \alpha$ *Tang.* $\frac{1}{2}\psi$, uit dat midden verwijderd, naar de zijde van de sterkste naald toe. Men heeft dan voor de gezeilde koersen a' de hoeken β, en de intensiteiten $i = \frac{A}{r^3} \, Cos.\beta = C \, Cos.\beta$ . . . . (13)
Deze intensiteit i is de kracht R waardoor het kompas aan boord gerigt wordt. Wij bekomen dus voor de tweede vergelijking (9')

$$\frac{C}{Ni} Cos.\beta = Cos.\varphi + r \, Sin\,\varphi - m \, Cos.\,a' + n \, Sin\,a' - p \, Cos.(2a' - \varphi) + q \, Sin.(2a' - \varphi);$$

in welke vergelijking drie onbekenden voorkomen, te weten m, n en i, want φ is eene functie van m, n, p, q en van a'. Trachten wij φ te elimineren. Zij

$$1 - f = \frac{Cos.\alpha}{1 + p \, Cos.2a' - q \, Sin.2a'} = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2 + r^2 + 2(p + rq) Cos.2a' - 2(q - rp) Sin.2a'}},$$

dan is, volgens (12')

$$Sin.(\varphi - \alpha) = (1 - f)(m \, Sin.\,\alpha' + n \, Cos.\,\alpha') = Sin.\,\lambda,$$

en

$$\varphi = \lambda + \alpha.$$

Dus

$$\frac{C}{Ni} Cos.\beta = -m\, Cos.a' + n\, Sin.a' + \left(Cos.\alpha + r\, Sin.\alpha - p\, Cos.(2a' - \alpha) + q\, Sin.(2a' - \alpha)\right) Cos.\lambda$$
$$- \left(Sin.\alpha - r\, Cos.\alpha + p\, Sin.(2a' - \alpha) + q\, Cos.(2a' - \alpha)\right) Sin.\lambda.$$

Zij nog

$$1 - g = Cos.\alpha + r\, Sin.\alpha - p\, Cos.(2a' - \alpha) + q\, Sin.(2a' - \alpha),$$
$$= (1 + p^2 + q^2 + r^2)(1 - f);$$
$$h = Sin.\alpha - r\, Cos.\alpha + p\, Sin.(2a' - \alpha) + q\, Cos.(2a' - \alpha),$$
$$= 2(1 - f)\{(p + rq)\, Sin.2a' + (q - rp)\, Cos.2a'\};$$

dan komt

$$\left.\begin{aligned} \frac{C}{Ni} Cos.\beta = &- \left(Cos.a' + (1 - f)\, h\, Sin.a'\right) m + \left(Sin.a' - (1 - f)\, h\, Cos.a'\right) n \\ &+ (1 - g)\sqrt{1 - (1 - f)^2\, (m\, Sin.a' + n\, Cos.a')^2} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (19)$$

Wanneer men nog eene waarneming gedaan heeft bij eenen tegengestelden schijnbaren koers, waarvoor dus a' met 180° was toegenomen, dan bekomt men eene dergelijke vergelijking, waarin *Sin.* a' en *Cos.* a' van teeken veranderd zijn, maar f, g en h onveranderd gebleven zijn; dus, β_{180} de waargenomen hoek zijnde:

$$\frac{C}{Ni} Cos.\beta_{180} = + \left(Cos.a' + (1 - f)\, h\, Sin.a'\right) m - \left(Sin.a' - (1 - f)\, h\, Cos.a'\right) n$$
$$+ (1 - g)\sqrt{1 - (1 - f)^2\, (m\, Sin.a' + n\, Cos.a')^2}.$$

Dus is:

$$\left.\begin{aligned} \frac{C}{2Ni}(Cos\,\beta_{180} - Cos.\beta) &= \left(Cos.a' + (1 - f)\, h\, Sin.a'\right) m - \left(Sin.a' - (1 - f)\, h\, Cos.a'\right) n \\ \frac{C}{2Ni}(Cos.\beta_{180} + Cos.\beta) &= (1 - g)\sqrt{1 - (1 - f)^2\, (m\, Sin.a' + n\, Cos.a')^2} \end{aligned}\right\} . (20)$$

Indien de horizontale intensiteit i op de plaats der waarneming bekend was, zouden deze beide vergelijkingen voldoende zijn ter bepaling van m en n; eene geringe fout op i zoude echter van merkelijken invloed zijn op m of op n naar gelang der waarde van a'. Het blijkt echter reeds, dat indien voor twee paren tegenovergestelde koersen $\beta_{180} = \beta$ wordt gevonden, alsdan noodwendig m en $n = 0$ moeten zijn; zoodat in de *gelijkheid* der hoeken tusschen de naalden van het intensiteits-kompas bij *tegenovergestelde* koersen, het bewijs gelegen is, dat het kompas niet door permanent- of sub-permanent

of door vertikaal geinduceerd magnetismus verstoord wordt, dat is goed wijst, behoudens den bekenden invloed van het horizontaal geinduceerde magnetismus.

Wanneer wij de vergelijkingen (20) in elkander deelen en ter bekorting schrijven

$$M = Tang. \tfrac{1}{2} (\beta + \beta_{180}) \; Tang. \tfrac{1}{2} (\beta - \beta_{180}),$$

komt

$$M = \frac{\left(Cos.\, a' + (1-f)\, h\, Sin.\, a'\right) m - \left(Sin.\, a' - (1-f)\, h\, Cos.\, a'\right) n}{(1-g) \sqrt{1-(1-f)^2 \,(m\, Sin.\, a' + n\, Cos.\, a')^2}}.$$

Nemen wij nu een ander paar tegengestelde koersen en wel liefst zoo, dat de nieuwe rigtingen de eerste regthoekig kruizen, dat is dat a' vermeerderd wordt met 90°, dan veranderen daarbij de grootheden f, g, h, en men zal hebben

$$M_{90} = \frac{-\left(Sin.\, a' - (1-f')\, h'\, Cos.\, a'\right) m - \left(Cos.\, a' + (1-f')\, h'\, Sin.\, a'\right) n}{(1-g') \sqrt{1-(1-f')^2 \,(m\, Cos.\, a' - n\, Sin.\, a')^2}},$$

Deze twee vergelijkingen bepalen m en n; stellen wij ter oplossing

$$m\, Sin.\, a' + n\, Cos.\, a' = x$$

$$m\, Cos.\, a' - n\, Sin.\, a' = y$$

dan is

$$M(1-g) = \frac{y + (1-f)\, h\, x}{\sqrt{1-(1-f)^2 x^2}} \qquad M_{90}(1-g') = \frac{-x + (1-f')\, h'\, y}{\sqrt{1-(1-f')^2 y^2}}$$

Deze vergelijkingen herleiden zich tot 4[de] magts-vergelijkingen van den tweeden magts vorm. Eene benaderende oplossing waarbij de tweede magten van h en h' en het produkt hh' verwaarloosd wordt, is echter wel voldoende. Men vindt aldus:

$$y = M(1-g)\sqrt{1-(1-f)^2 x^2} - (1-f)hx; \quad x = -M_{90}(1-g')\sqrt{1-(1-f')^2 y^2} + (1-f')h'g.$$

als h en $h' = 0$ zijn, komt

$$y = \left\{\frac{1-(1-f')^2 (1-g')^2 M^2_{90}}{1-(1-f)^2 (1-f')^2 (1-g)^2 (1-g')^2 M^2 M^2_{90}}\right\}^{\frac{1}{2}} (1-g) M,$$

$$x = -\left\{\frac{1-(1-f)^2 (1-g)^2 M^2}{1-(1-f)^2 (1-f')^2 (1-g)^2 (1-g')^2 M^2 M^2_{90}}\right\}^{\frac{1}{2}} (1-g') M_{90}.$$

Deze benaderde waarden, in de bovenstaande naauwkeurige uitdrukkingen overbrengende, komt:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{\left[1-(1-f)^2(1-g')^2M^2_{90}\right]^{\frac{1}{2}}(1-g)M+\left[1-(1-f')^2(1-g)^2M^2\right]^{\frac{1}{2}}(1-f)(1-g')h.M_{90}}{\left[1-(1-f)^2(1-f')^2(1-g)^2(1-g')^2M^2M^2_{90}\right]^{\frac{1}{2}}} \\ x &= \frac{-\left[1-(1-f')^2(1-g)^2M^2\right]^{\frac{1}{2}}(1-g')M_{90}+\left[1-(1-f)^2(1-g')^2M^2_{90}\right]^{\frac{1}{2}}(1-f')(1-g)h'M}{\left[1-(1-f)^2(1-f')^2(1-g)^2(1-g')^2M^2M^2_{90}\right]^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}\right\}(21)$$

Welke waarden — des gevorderd — door herhaalde substitutie in de vergelijkingen in x en y, naauwkeuriger nog gevonden kunnen worden.

Hierbij behooren nu nog de volgende uitdrukkingen:

$$\left.\begin{aligned} 1-f &= (1+p^2+q^2+r^2+2(p+rq)\,Cos\;2a'-2(q-rp)\,Sin\;2a')^{-\frac{1}{2}}\;, \\ 1-f' &= (1+p^2+q^2+r^2-2(p+rq)\,Cos.\,2a'+2(q-rp)\,Sin.\,2a')^{-\frac{1}{2}}\;, \\ 1-g &= (1+p^2+q^2+r^2)\,(1-f)\;;\quad 1-g'=(1+p^2+q^2+r^2)\,1-f')\;; \\ h &= 2\,(1-f)\,\{(p+rq)\,Sin.\,2a'+(q-rp)\,Cos.\,2a'\}\;, \\ h' &= -\,2\,(1-f')\,\{(p+rq)\,Sin.\,2a'+(q-rp)\,Cos.\,2a'\}\;. \end{aligned}\right\}\;\ldots\;(22)$$

Gaan wij over ter vereenvoudiging, door weglating van al wat, volgens de natuur van het voorstel, mag verwaarloosd worden, dan valt in de eerste plaats op te merken, dat p doorgaande $< \frac{1}{10}$ is, zeer zelden 0,14 bereikt, en gemiddeld op 0,07 kan gesteld worden. Wij zullen dus p^2 verwaarloozen. Verder dat zeer zelden q en r 0,02 bereiken; wij mogen dus deze grootheden geheel verwaarloozen, omdat zij in de uitdrukkingen van x en y toch alleen als factoren van M of M_{90} voorkomen, en het al zeer wel is indien men op x of y niet meer dan $\frac{1}{50}$ der waarde fout heeft. Aldus komt

$$1-f=1-p\,Cos.\,2a'\;,\quad 1-g=(1+p^2)(1-f)=1-p\,Cos.\,2a'\;,$$

$$1-f'=1+p\,Cos.\,2a'\;,\quad 1-g'=(1+p^2)(1-f')=1+p\,Cos.\,2a'\;,$$

$$(1-f)(1-g')=(1-f')(1-g)=(1+p^2+q^2+r^2)(1-f)(1-f')=(1+p^2)(1-p^2Cos.^2\,2a')=1,$$

$$h=2\,(1-f)\,p\,Sin.\,2a'=2\,p\,Sin.\,2a'\;,\quad h'=-\,2\,(1-f')\,p\,Sin.\,2a'=-\,2\,p\,Sin.\,2a'=-\,h.$$

en dus

$$\left.\begin{aligned} y &= \left\{\frac{1-M^2_{90}}{1-M^2M^2_{90}}\right\}^{\frac{1}{2}}(1-p\,Cos.2a')M+2\left\{\frac{1-M^2}{1-M^2M^2_{90}}\right\}^{\frac{1}{2}}(p\,Sin.2a')M_{90}=m\,Cos.a'-n\,Sin.a' \\ x &= -\left\{\frac{1-M^2_{90}}{1-M^2M^2_{90}}\right\}^{\frac{1}{2}}(1+p\,Cos.2a')M_{90}-2\left\{\frac{1-M^2}{1-M^2M^2_{90}}\right\}^{\frac{1}{2}}(p\,Sin.2a')M=m\,Sin.a'+n\,Cos.a' \end{aligned}\right\}(23)$$

x en y gevonden zijnde, heeft men nog de intensiteit van het aard-magnetismus op de plaats der waarneming door de formulen

$$i = \frac{C}{2N} \cdot \frac{Cos.\beta_{180} + Cos.\beta}{(1-g)\sqrt{1-(1-f)^2 x^2}} = \frac{C}{2N} \cdot \frac{Cos.\beta_{270} + Cos.\beta_{90}}{(1-g')\sqrt{1-(1-f')^2 y^2}} \quad \ldots (24)$$

Uit welke beide waarden een midden kan genomen worden.

De uitdrukkingen (23) worden nog eenvoudiger, wanneer men waarnemingen gedaan heeft met de koersen N en Z, O en W, want dan is $a' = 0$, en bij gevolg

$$m = \left\{\frac{1-M^2_{90}}{1-M^2_0 M^2_{90}}\right\}^{\frac{1}{2}}(1-p)M_0 \quad n = -\left\{\frac{1-M^2_0}{1-M^2_0 M^2_{90}}\right\}^{\frac{1}{2}}(1+p)M_{90} \ldots (25)$$

Hetgeen dus de doelmatigste keus is. — Men ziet dat de afwijkingen die met het schip N of Z, volgens het kompas, plaats hebben, voornamelijk afhangen van de waarnemingen met het schip O en W, dat is van M_{90}; terwijl wederkerig, de afwijkingen van het kompas met de schijnbare koersen O en W, voornamelijk afhangen van de waarnemingen met het schip N en Z. Deze opmerking geldt voor alle streken, gelijk uit de vergel. (23) ligt te zien is; zoodat het Intensiteits-kompas *niet* de afwijkingen aanwijst, die *werkelijk plaats hebben*, maar zulke, die *plaats zullen hebben*, wanneer het schip 8 streek van koers verandert.

Het Intensiteits-kompas geeft nog het middel aan de hand om den invloed te bepalen (althans nabij genoeg voor de behoefte op zee) welke de overhellingen van het schip op het kompas uitoefenen. — Tot hier hebben wij stilzwijgend ondersteld, dat de hoeken β gevonden zijn met een regt liggend schip. Mogt dit het geval niet wezen, dan gelden zij eigenlijk voor het hellende schip, en dus slechts zoo lang als die helling blijft bestaan, wanneer namelijk de hellingen van invloed zijn. — Het is echter noodzakelijk hier op te letten, en dus ook, bij de opteekening van eenen hoek tusschen de naalden van het Intensiteits-kompas tevens op te teekenen de helling van het schip. Mogten dan, zoo als ligt gebeurt, bij denzelfden of nagenoeg denzelfden koers, verschillende hellingen voorkomen, en mogt dit verschillende hoeken β geven, dan is het ligt na te gaan hoe groot β is wanneer het schip regt ligt; vooral wanneer bij de gedachte koers, hellingen over stuur- en over bakboord waargenomen zijn. Daar bijna nimmer een schip standvastig eene zelfde helling behoudt, maar door de werking van den wind van tijd tot tijd meer over-

helt, en zich weder oprigt, zoo kan de herhaling dezer beweging doen zien of en hoeveel invloed zij op den hoek der naalden van het Intensiteits-kompas heeft. (Indien althans dit kompas op zee genoegzaam bruikbaar is, dat alleen de ondervinding kan leeren). Men bekomt dus op deze wijze niet alleen de hoeken β voor het regt liggend schip, maar ook de gemiddelde veranderingen dier hoeken voor de overhellingen en kan dus daaruit $\Delta\, m$ en $\Delta\, n$ berekenen.

Men weet, dat de fouten door de overhelling ontstaande het meest plaats hebben bij noordelijke en zuidelijke koersen, en dat zij bij oostelijke en westelijke weinig te duchten zijn, omdat door de overhellingen de coëfficient n het meest verandert, en de veranderingen der overige coëfficienten betrekkelijk gering zijn. Daar nu n voornamelijk bepaald wordt, door waargenomen hoeken β bij de koersen O en W, zoo volgt, dat bij deze koersen het meest acht moet gegeven worden op de veranderingen van den hoek tusschen de naalden. — Onderstellen wij dat de grootheid m gering is, dan heeft men, benaderend, bij den koers Oost volgens (19)

$$\frac{C}{N\,i}\, Cos.\beta = n + (1 - g) = 1 + n + p\ .$$

Laat nu bij eene overhelling h over stuurboord, β veranderen in $\beta + \Delta\beta$, dan is

$$\frac{C}{N\,i}\, Cos.(\beta + \Delta\beta) = 1 + n + \Delta\, n + p + \Delta\, p\ .$$

Maar $\Delta\, p$ is zeer klein, en mag verwaarloosd worden, dus

$$\frac{Cos.\beta - Cos.(\beta + \Delta\beta)}{Cos.\beta} = -\frac{\Delta\, n}{1 + n + p} = Tang.\beta \times \Delta\beta \quad \text{nagenoeg}\ ,$$

dus $$\Delta\, n = -\,(1 + n + p)\; Tang.\,\beta \times \Delta\beta\ ,$$

of stellende $$\Delta\, n = x \times \Delta\, h\ ,$$

komt $$x = -\,(1 + n + p)\,\frac{\Delta\beta}{\Delta\, h}\; Tang.\,\beta\ .$$

Bij gevolg de afwijkingen door de overhellingen ontstaande nagenoeg

$$\Delta\varphi = -\,(1 + n + p)\,\frac{\Delta\beta}{\Delta\, h}\; Tang.\,\beta \times h\; Cos.\,a' \quad \ldots\ldots\ldots\ (26)$$

Indien m niet gering is, dan moet $(1 - g)$ of in dit geval $(1 + p)$, vermenigvuldigd worden met $\sqrt{1 - m^2}$; men ziet echter dat de hierdoor ontstaande verbetering niet groot zijn kan, zelfs al was m overeenstemmend met eene afwijking van 20°, want dan nog zoude $\sqrt{1 - m^2}$ slechts 0,06 minder dan de eenheid zijn.

Het teeken — in de uitdrukking (26) geeft te kennen, dat bij eenen koers *Noord* en eene helling over *stuurboord*, het kompas naar het Oosten zal afwijken, dat is naar de *lij-zijde* van het schip. Bij de waarneming van den hoek β, met den koers Oost, is ondersteld dat β *toenam*, bij eene overhelling *over stuurboord*-zijde; hieruit volgt, dat het noorden van het kompas in dit geval zich naar de lij-zijde zal verplaatsen. In geval de hoek tusschen de naalden van het Intensiteits-kompas was *afgenomen* met den koers Oost, en eene helling over stuurboord, dan zoude de afwijking van het kompas naar de *loef-zijde* plaats gehad hebben. In het algemeen zal de afwijking van het Noorden van het kompas *altijd* naar de *lij-zijde* of *altijd* naar de *loef-zijde* plaats hebben, naar gelang, bij oostelijke of westelijke koersen, (wanneer de einden der kompas-naalden naar de boorden van het schip gerigt zijn) de noord-einden naar de *lij-zijde* of naar de *loef-zijde* getrokken worden; — zijn de noord-einden het *verste* van het boord, dat men beschouwt, verwijderd, dan opent de hoek der naalden zich bij eene aantrekking naar dat boord; zijn de noord-einden het *naast* bij het boord dat men beschouwt, dan sluit de hoek der naalden zich, bij eene aantrekking naar dat boord, veroorzaakt door een oprijzen, of nederdalen van het beschouwde boord. Het is op deze wijze ligt te onderscheiden welk boord het Noorden aantrekt, het *lij-* of het *loef*-boord, altijd bij oostelijke of westelijke koersen, en om, wanneer men dit weet, ook bij noordelijke of zuidelijke koersen te weten naar welken kant de afwijking door de overhelling voortgebragt geschiedt.

Het was van veel belang zoo men voor iedere gegeven lengte en breedte de horizontale intensiteit bekend had *; dan ware het ligt voor iedere bepaalde plaats den hoek β, en dus ook ψ, te vinden welke de naalden van het Intensiteits-kompas zouden moeten maken. Stellen wij toch in (19) m en $n = 0$, dan komt

* In hoe verre de bekende theorie van GAUSS en zijne tafelen van Inclinatie, Declinatie en Intensiteit hiervoor voldoende zouden zijn is onzeker.

$$\left.\begin{aligned} Cos.\beta &= \frac{N}{C}(1-g).i\,, \\ \text{of}\quad Cos.\beta &= \frac{N(1+p^2+q^2+r^2)}{\sqrt{1+p^2+q^2+r^2+2(p+rq)\,Cos.\,2a'-2(q-rp)\,Sin.\,2a'}} \times \frac{i}{C} \\ &= N(1-p\,Cos.\,2a'+q\,Sin.\,2a') \times \frac{i}{C} \quad \text{nagenoeg,} \end{aligned}\right\} (27)$$

en vervolgens φ = *functie* (β).

Men had dus den hoek welke de naalden *moesten* wijzen, en zoude, op het oog af, beoordeelen kunnen of er afwijkingen bestonden, en ook in welken zin zij plaats hadden, zonder eenige berekening. — Twee waarnemingen, bij koersen die ongeveer 90° van elkander moesten verschillen, b. v. tusschen 6 en 10 streken, waren dan voldoende om m en n te vinden.

Stellende weder $x = m\,Sin.\,a' + n\,Cos.\,a'$, $x' = m\,Sin.\,(a'+k) + n\,Cos.\,(a'+k)$,

$y = m\,Cos\,a' - n\,Sin.\,a'$, $y' = m\,Cos.\,(a'+k) - n\,Sin.\,(a'+k)$.

Wanneer dus het verschil der schijnbare koersen $= k$ is, dan heeft men volgens (19):

$$\left\{\frac{C}{N\,i}\,Cos.\,\beta-(1-g)\right\} = -\,y-(1-f)\,h\,x-(1-g)\left\{1-\sqrt{1-(1-f)^2x^2}\right\},$$

$$\left\{\frac{C}{N\,i}\,Cos.\,\beta'-(1-g')\right\} = -\,y'-(1-f')\,h'x'-(1-g')\left\{1-\sqrt{1-(1-f')^2x'^2}\right\};$$

maar $y = \dfrac{x'-x\,Cos.\,k}{Sin.\,k}$, $y' = -\dfrac{x-x'\,Cos.\,k}{Sin.\,k}$, dus:

$$\left.\begin{aligned} \left\{\frac{C}{N\,i}\,Cos.\beta-(1-g)\right\} &= -\frac{x'}{Sin.\,k}+\left(Cot.k-(1-f)h\right)x-(1-g)\left\{1-\sqrt{1-(1-f)^2x^2}\right\}, \\ \left\{\frac{C}{N\,i}\,Cos.\,\beta'-(1-g')\right\} &= +\frac{x}{Sin.\,k}-\left(Cot.k+(1-f')h'\right)x'-(1-g')\left\{1-\sqrt{1-(1-f')^2x'^2}\right\}; \end{aligned}\right\} (28)$$

of voerende weder de hoeken λ en λ' in, zijnde $Sin.\,\lambda = (1-f)\,x$, $Sin.\,\lambda' = (1-f')\,x'$,

$$\left.\begin{aligned} \left\{\frac{C}{N\,i}\,Cos.\,\beta-(1-g)\right\} &= -\frac{Sin.\,\lambda'}{(1-f')\,Sin.k}+\left(\frac{Cot.k}{1-f}-h\right)Sin.\,\lambda-2\,(1-g)\,Sin.^2\,\tfrac{1}{2}\,\lambda\,, \\ \left\{\frac{C}{N\,i}\,Cos.\beta'-(1-g')\right\} &= +\frac{Sin.\,\lambda}{(1-f)\,Sin.\,k}-\left(\frac{Cot.\,k}{1-f'}+h'\right)Sin.\,\lambda'-2\,(1-g')\,Sin.^2\,\tfrac{1}{2}\,\lambda'\,. \end{aligned}\right\} (29)$$

Indien de eerste leden dezer vergelijkingen (28) of (29) voor de koersen a' en $a'+k$, 0 zijn, dan zijn x en x' of λ en λ' ook $=0$ en bij gevolg insgelijks m en n.

Wanneer men zich beperkt tot eene benaderde bepaling der afwijkingen λ binnen 1°, dan zullen de laatste termen der genoemde vergelijkingen, in de tweede leden, verwaarloosd mogen worden, zoo lang de eerste leden, ieder $< 0{,}17$ blijven, dat is zoo lang λ en λ' 10° niet te boven gaan. In dit geval heeft men, wanneer men, kortheidshalve, stelt

$$\frac{C}{Ni}\,Cos.\,\beta - (1-g) = A\,, \qquad \frac{C}{Ni}\,Cos.\,\beta' - (1-g') = B\,;$$

en p^2 enz. verwaarloost, als hierboven:

$$-A = \frac{x'}{Sin.\,k} - (Cos.\,k - 2\,p\,Sin.\,2\,a'\,Sin.\,k)\,\frac{x}{Sin.\,k}\,,$$

$$+B = \frac{x}{Sin.\,k} - (Cos.\,k + 2\,p\,Sin.\,2\,a''\,Sin.\,k)\,\frac{x'}{Sin.\,k}\,;$$

waaruit

$$\frac{x}{Sin.\,k} = \frac{B - (Cos.\,k + 2\,p\,Sin.\,2\,a''\,Sin.\,k)\,A}{Sin.^2\,k + 2\,p\,(Sin.\,2a' - Sin.\,2\,a'')\,Cos.\,k\,Sin.\,k}\,,$$

$$\frac{x'}{Sin.\,k} = -\frac{A - (Cos.\,k - 2\,p\,Sin.\,2\,a'\,Sin.\,k)\,B}{Sin.^2\,k + 2\,p\,(Sin.\,2\,a' - Sin.\,2\,a'')\,Cos.\,k\,Sin.\,k}\,.$$

En verder

$$m = \frac{x'}{Sin.\,k}\,Cos.\,a' - \frac{x}{Sin.\,k}\,Cos.\,a''\,, \quad n = \frac{x}{Sin.\,k}\,Sin.\,a'' - \frac{x'}{Sin.\,k}\,Sin.\,a'\,;$$

dus, na eenige herleiding,

$$\left.\begin{aligned} m &= -\frac{A\,Sin.\,a'' - B\,Sin.\,a'}{Sin.\,k + 2p\,(Sin.\,2a' - Sin\,2a'')\,Cos.\,k} + 2\,p \times \frac{A\,Cos.\,a''\,Sin.\,2a'' - B\,Cos.\,a'\,Sin.\,2a'}{Sin.\,k}\,,\\ n &= -\frac{A\,Cos.\,a'' - B\,Cos.\,a'}{Sin.\,k + 2p\,(Sin.\,2a' - Sin.\,2a'')\,Cos.\,k} - 2\,p \times \frac{A\,Sin.\,a''\,Sin.\,2a'' - B\,Sin.\,a'\,Sin.\,2a'}{Sin.\,k}\,. \end{aligned}\right\}\ (30)$$

Indien $k = 90°$, dat het doelmatigste is, dus ook $a'' = a' + 90°$ is, komt:

$$\left.\begin{aligned} m &= -\,(A\,Cos.\,a' - B\,Sin.\,a') + 2\,p\,(A\,Sin.\,a' - B\,Cos.\,a')\,Sin.\,2\,a'\\ n &= +\,(A\,Sin.\,a' + B\,Cos.\,a') + 2\,p\,(A\,Cos.\,a' + B\,Sin.\,a')\,Sin.\,2\,a' \end{aligned}\right\}\ldots\ (31)$$

en zoo nog $a' = 0$ dus $a'' = 90°$ is, komt:

$$m = -A\,, \qquad n = +B \ldots\ldots\ldots\ldots\ (32)$$

Bovenstaande vergelijkingen, voor m en n, onderstellen steeds, dat men de tweede magten van A en B kan verwaarloozen; mogt dit niet het geval zijn, dan kan men eerst benaderde waarden van x en y berekenen en dan A en B verbeteren, door er $(1-g)\{1-\sqrt{1-(1-f)^2 x^2}\}$ en $(1-g')\{1-\sqrt{1-(1-f')x'^2}\}$ of ook $\frac{1}{2}(1-g)(1-f)^2 x^2$ en $\frac{1}{2}(1-g')(1-f')^2 x'^2$ bij op te tellen; weder x en x' te berekenen enz. tot men voldaan is. In het laatste geval, $a' = 0$ $a'' = 90°$, geeft dit

$$m = -A + \tfrac{1}{2}(1-p)^3 n^2\,, \qquad n = +B - \tfrac{1}{2}(1+p)^3 m^2\,,$$

welke vergelijkingen ter behandeling ook eenvoudig genoeg zijn.

In het algemeen is het doelmatiger te zorgen, dat de afwijkingen van het kompas steeds klein blijven, liever dan te trachten door waarnemingen en berekeningen, groote afwijkingen te verbeteren, waarbij onvermijdelijk en de waarnemingen en de berekeningen steeds lastiger worden, en de uitkomsten minder zeker zijn. Om met het Intensiteits-kompas dit doel, — kleine afwijkingen, — te bereiken, kan met vrucht gebruik gemaakt worden van de door Airy uitgedachte manier van het leggen van magneetstaven in behoorlijke stellingen nabij het kompas. Bij het intensiteits-kompas kan dit altijd, zoo wel op zee — bij handzaam weder — als in eene haven geschieden, en hiertoe schijnt eene benaderde kennis van de horizontale magnetische intensiteit, voor alle lengten en breedten wel voldoende.

Men weet, dat de manier van Airy bestaat in het leggen van twee magneetstaven, de eene dwarsscheeps, dienende om bij de koersen N en Z het kompas (voor zoo ver het permanente of sub-permanente en vertikaal geinduceerde magnetismus betreft) goed wijzend te maken; met andere woorden om den coëfficient n in form. (9) te vernietigen; de andere magneetstaaf langscheeps, om daardoor het kompas goed wijzend te doen zijn bij de koersen O en W, dat is dienende om den coëfficient m tot *nul* te herleiden. — Bij het Intensiteits-kompas zal men de orde van het aanbrengen der magneetstaven (die evenwel dezelfde diensten zullen moeten doen) moeten omkeren, te weten met de koersen N of Z, zal men de langscheepsche, en bij de koersen O of W de dwarsscheepsche magneetstaaf moeten plaatsen.

Gesteld het schip ligt volgens het Intensiteits-kompas Noord aan, fig. 8, waar de peil de rigting van het schip aanwijst. Ondersteld nu, dat de hoek N M N' der beide naalden, voor de bekende lengte en breedte van het schip, dat is voor de gegeven intensiteit, en de bekende p, q, r, te groot of te klein

wordt waargenomen, b. v. te groot, dan weet men hieruit, dat de achtersteven van het schip aantrekkend werkt op de beide noordpolen N en N', afstootend op de zuidpolen Z en Z', dus dat bij eenen oostelijken koers het kompas eene westelijke afwijking zal hebben, bij eene westelijke koers, eene oostelijke afwijking. Om dit echter (grootendeels) te voorkomen, brenge men eene magneetstaaf M' langscheeps, in de nabijheid van het kompas, zoodanig dat de staaf eenen gelijken afstand tot elke der beide naalden heeft, dus in een vlak, dat regthoekig gaat door het midden van den afstand der middelpunten van beide naalden. Als dan de zuidpool der staaf naar voren gekeerd is, zal de *hoek* tusschen de naalden *kleiner* worden, zonder dat de *gemiddelde* rigting verandert. — Het is ligt in te zien, dat zoodanig de uitwerking van de staaf M', in den aangewezen stand zijn moet; want het magnetismus der staaf M' werkt om de horizontale intensiteit i' aan boord te versterken, en dus om den hoek ψ te verkleinen. Men heeft het aldus in zijne magt om, door naderbij en verderaf brengen der staaf M', dien hoek te brengen tot hetgeen hij zijn moet. — Het spreekt van zelf, dat wanneer omgekeerd de hoek ψ te klein geweest was, de staaf M' ook omgekeerd, met het Noorden naar voren, zoude moeten gelegen worden.

Indien nu, de staaf M' geplaatst zijnde, het schip in den koers O of W, b. v. Oost, volgens het kompas gebragt wordt, fig. 9, dan zal bij deze koersen genoegzaam geene, of slechts eene geringe afwijking bestaan, ten gevolge van de werking der gelegen magneetstaaf M', welke nu ten Zuiden van het kompas gekomen is. De hoek ψ tusschen de naalden zal evenwel, in het algemeen, niet meer de grootte hebben, die hij hebben moet, maar of te klein of te groot zijn, b. v. het laatste. Alsdan brenge men de tweede magneetstaaf *m'*, dwarsscheeps met het Zuiden naar bakboord, aan, op zoodanigen afstand, dat weder de hoek tusschen de naalden wordt wat hij zijn moet. Was het schip onder dezelfde, ondersteldo, omstandigheden van het Noorden naar het Westen omgewend, dan zoude de hoek tusschen de naalden niet te groot maar te klein geworden zijn; want daar de hoek ψ met den koers Oost te groot geworden is, zoo heeft er eene aantrekking der noordpolen naar stuurboord-zijde plaats: bij eenen westelijken koers zullen dus die polen meer zamengetrokken zijn. Dit geeft aan de magneet *m'* dezelfde stelling in het schip, te weten met het Zuiden naar bakboord.

Door de werking der beide magneten M' en *m'* zullen nu alle afwijkingen van het kompas, uit het permanent of sub-permanent en vertikaal geindu-

ceerde magnetismus ontstaande, tot geringe waarden herleid zijn, te geringer naarmate de afwijkingen *zonder de staven,* geringer waren. — Zonder de staven had men toch, zeer nabij, voor $a' = 0$, $a'' = 90°$

$$m = -A + \tfrac{1}{2}(1-p)^3 n^2, \quad n = B - \tfrac{1}{2}(1+p)^3 m^2.$$

Door het aanbrengen van de langscheepsche magneetstaaf wordt *m veranderd, n onveranderd* gelaten en A tot *nul* herleid; dus heeft men met de langscheepsche staaf alleen:

$$m' = +\tfrac{1}{2}(1-p)^3 n^2, \quad n = B' - \tfrac{1}{2}(1+p)^3 m'^2.$$

Door het aanbrengen van de dwarsscheeps liggende staaf wordt *n veranderd, m' onveranderd* gelaten en B' tot *nul* herleid, dns komt met de beide staven:

$$m' = -A' + \tfrac{1}{2}(1-p)^3 n'^2, \quad n' = -\tfrac{1}{2}(1+p)^3 m'^2.$$

Alzoo $\quad m' = \tfrac{1}{2}(1-p)^3 \{B' - \tfrac{1}{2}(1+p)^3 m'^2\}^2 = \tfrac{1}{2}(1-p)^3 . B'^2 \quad$ nabij,

en $\quad n' = -\tfrac{1}{2}(1+p)^3 m'^2 \quad = -\tfrac{1}{8}(1-p)^3 B'^4 \quad$ " .

m' is alzoo tot eene grootheid der *tweede* orde, n' tot eene van de *vierde* orde herleid; deze laatste kan verwaarloosd worden, dus zal de tweede of dwarsliggende staaf als goed geplaatst aangenomen mogen worden; terwijl uit de waargenomen waarde van B' berekend worden kan, hoeveel de eerste staaf nog moet verplaatst worden. — Beter echter is het, uit hoofde der onvermijdelijke waarnemingsfouten, vooral op zee, om behalven de koersen N en O, ook nog andere koersen in aanmerking te nemen, en om door een langzaam verzetten, naar gelang de reis vordert, en naar gelang de noodwendigheid zich vertoont, de staven steeds *zoo goed* geplaatst te houden, dat althans de tweede magten der afwijkingen verwaarloosd kunnen worden, waardoor de formulen (30) of (31) zouden toegepast kunnen worden, als men van i genoegzaam zeker is.

De reden waarom de staven M' en m', vooral de eerste, ook theoretisch, niet terstond goed op den vereischten afstand geplaatst worden, is blijkbaar daarin gelegen, dat het schip bij de eerste waarneming (fig. 8) niet Noord maar slechts schijnbaar Noord, volgens het afwijkend kompas voorlag — zoodat dan ook de omwending van het schip N tot O, slechts schijnbaar 90° bedragen kan. Indien bij de plaatsing van de staaf M', het schip juist in den magnetischen meridiaan gerigt was geweest, dan zouden beide staven, geplaatst hebben kunnen worden, zonder dat het noodig was het schip van

rigting te doen veranderen. — Om dit zonder eenige berekening te doen, plaatse men (het schip Noord of Zuid liggend) de dwarsscheepsche magneet totdat de afwijking van het Intensiteits-kompas (aangewezen door de lijn die den hoek ψ midden doordeelt, of zoo, dat $Sin.\,\varphi' : Sin.\,\varphi = 2\,ML : 2\,ml$ is) nagenoeg $= 0$ wordt. Daarna plaatse men de langscheepsche staaf om den hoek ψ nagenoeg de vereischte grootte te geven. — Door eenige verschikkingen komt men vervolgens ligtelijk daartoe om de afwijking $\varphi = \alpha$, volgens de eerste form. (12′) en den hoek ψ de juiste grootte, volgens form. (27) te geven; als wanneer de m en n der form. (9′) tot nul herleid zullen zijn. Het is duidelijk, dat het juist gerigt zijn van het schip, naar het magnetische Noorden, Zuiden, Oosten of Westen, tot het plaatsen der magneten, geen vereischte is, (de bewerking is dan slechts gemakkelijker) maar dat dit met elke willekeurige rigting geschieden kan, indien die rigting slechts bekend is. Dan toch heeft men de koers a', door het kompas aangewezen; de miswijzende koers a, volgens onderstelling, dus ook de afwijking $\varphi = a' - a$, en voorts de kracht R uit den hoek ψ van het Intensiteits-kompas. Met deze gegevens, en de altijd bekend onderstelde N, p, q, r, vindt men gemakkelijk de waarden van m en n, door de formulen (9′), waardoor dan verder de afstanden en rigtingen der magneetstaven gevonden kunnen worden, indien men de magnetische momenten dezer laatste weet. — Geheel practisch zoude het ook kunnen geschieden, indien men zich niet houdt aan de bepaling, dat een der staven langscheeps, de andere dwarsscheeps geplaatst wordt, maar slechts daaraan, dat de staven onderling eenen regten hoek vormen. Men houdt daartoe een der staven, b. v. m', steeds evenwijdig aan de lijn ZZ' of NN' die de zuid- of noordpolen van de naalden van het Intensiteis-kompas vereenigt, doet daardoor die naalden beide tegelijk, in denzelfden zin van rigting veranderen, zonder merkelijke verandering van den hoek ψ, totdat de gemiddelde rigting de afwijking $\varphi = \alpha$ aanwijst. Daarna houdt men de andere staaf M' evenwijdig aan de lijn NZ' of $N'Z$, welke twee ongelijknamige polen der kompasnaalden verbindt, totdat de hoek ψ de juiste grootte bekomt. Hiermede is de zaak afgeloopen. Deze manier kan in eene haven aangewend worden, en soms dienstig zijn als er, (om welke reden dan ook) geene gelegenheid bestaat het schip om te wenden.

Wij merken nog op, dat bij het Intensiteits-kompas het doelmatiger is twee gelijk sterke langscheepsche magneetstaven, de eene ter linker- de ander ter regterzijde, evenwijdig aan elkander, en met de gelijknamige polen

naar denzelfden kant, te plaatsen, dan slechts eene enkele staaf, omdat dan, bij overhellingen van het schip, de som der krachten op *elk* der boven elkander geplaatste naalden van het Intensiteit-kompas bijna geheel onveranderd blijft. Door het overhellen van het schip wordt dan toch het midden van elk der naalden gelijktijdig nader bij de eene magneetstaaf, en verder van de andere staaf afgebragt (fig. 10). — Voor de dwarsscheeps loopende magneetstaaf is er minder noodzakelijkheid, dat zij dubbel, één voor één achter het kompas, zij.

Na het leggen der dwars- en langscheepsche staven blijven nog overig de afwijkingen die door de overhellingen ontstaan: ook deze kunnen grootendeels vernietigd worden bij het Intensiteits-kompas op eene geheel practische wijze. Hiertoe kunnen onder en boven het kompas twee staven van nagenoeg gelijk vermogen evenwijdig aan de masten van het schip (vertikaal als het schip regt op ligt) aangebragt worden (fig. 11), met de gelijknamige polen naar boven, en naar onderen. Bij eenen regten stand van het schip zijn de krachten welke deze staven op de naalden van het Intensiteits-kompas uitoefenen vertikaal, zij hebben dus geenen invloed noch op de gemiddelde rigting der naalden, noch op den hoek ψ. Bij eene overhelling van het schip ontstaat er echter eene zijdelingsche werking, waardoor de noordpolen der naalden naar de loef- of lijzijde getrokken worden, en het is duidelijk, dat deze zijdelingsche kracht zeer nabij evenredig zijn zal aan den *Sinus* des overhellingshoeks. Dit alles is wel bekend: dat hier twee staven, een onder, een boven verlangd worden, is duidelijk, omdat anders de invloed op ieder der naalden van het kompas niet gelijk zijn kan.

De wijze van het regelen der afstanden onder en boven het midden M tusschen de beide naalden stel ik mij nu op zee aldus voor: het dient te geschieden bij oostelijke of westelijke koersen. Indien alsdan blijkt, dat er eene aantrekking van de noordpolen der naalden naar de loefzijde bestaat, dan moeten de magneetstaven met de zuidpolen naar onder, de noordpolen naar boven, zoo als in de figuur, geplaatst worden, waardoor de noordpolen naar lij getrokken worden. Bestaat er eene aantrekking der noordpolen naar de lij-zijde, dan moeten de staven onder en boven omgekeerd aangebragt worden, de noordpolen onder, de zuidpolen boven, waardoor de noordpolen der naalden naar de loef-zijde getrokken zullen worden. Men verplaatse nu de staven zoo lange totdat er geene merkbare verandering van den hoek ψ tusschen de naalden van het Intensiteits-kompas meer plaats grijpt, wanneer

het schip eene aanmerkelijke vermeerdering of vermindering van overhelling bekomt. Hiermede zullen de afwijkingen van het Intensiteits-kompas uit de overhellingen ontstaande, en bij noordelijke en zuidelijke koersen te duchten, grootendeels vernietigd zijn. Indien de fouten wegens de overhellingen, niet groot zijn, verdient echter welligt de manier om ze in rekening te brengen, zoo als hierboven verklaard is, de voorkeur.

Als een voorbeeld van toepassing der theorie van het Intensiteits-kompas moge het volgende dienen: In November j.l. (1858) is de bovengenoemde toestel (pag. 13 en 14) met de twee naalden geplaatst geweest op het dek van een ijzeren stoomboot, bij gelegenheid dat dit schip rondgehaald werd om de afwijkingen van twee aan boord geplaatste kompassen te onderzoeken. De rigting van het middelpunt van elke naald naar de vertikale draad waarbij de verdeelingen werden afgelezen, was *zoo na mogelijk* evenwijdig aan de kiel van het schip; en waarschijnlijk niet meer dan ± 1° fout. De koersen werden gerekend van het N, oost-om, tot 360° toe. De waarnemingen waren nu de volgende:

1. MISWIJZENDE KOERS a	2. KOERS OP DE ONDERSTE ROOS.	3. KOERS OP DE BOVENSTE ROOS.	4. VERSCHIL DER KOERSEN ψ	5. GEMIDDELDE KOERS.	6. ½ VERSCHIL VAN DE HOEKEN DER NAALDEN OOST EN WEST.	7. SCHIJNBARE KOERS a'	8. AFWIJKING WEST $a' - a$	9. INTENSITEIT i
1°,5	32°,5	296°,2	96°,3	344°,35	3° 57′	340° 24′	—21° 6′	0,8200
46,5	105,7	343,0	122,7	44,35	6 26	37 55	— 8 35	0,5994
88,4	174,0	50,5	123,5	112,25	6 33	105 42	+17 18	0,5926
133,8	202,0	122,0	80,0	162,0	2 57	159 3	+25 15	0,9295
178,7	215,0	172,5	42,5	193,75	1 23	192 22	+13 40	1,1865
220,8	241,5	213,5	28,0	227,5	0 53	226 37	+ 5 49	1,2634
268,7	281,2	240,0	41,2	260,6	1 19	259 17	— 9 25	1,1946
312,3	331,0	271,0	60,0	301,0	2 3	298 57	—13 21	1,0753

De eerste kolom wijst den koers, of liever de rigting van het schip aan beoosten den magnetischen meridiaan; de tweede die rigting beoosten het Noorden van de *onderste* roos, de derde kolom diezelfde rigting beoosten het Noorden van de *bovenste* roos. Men lette hierbij op, dat de onderste naald naar het *Westen*, de bovenste naar het *Oosten* afweek, en dat de afwijking der onderste naald de grootste is, volgens de waarnemingen van pag. 14. Het ver-

schil der koersen in de 4de kolom, de hoek ψ, is de *kleinste* boog tusschen de noord-einden der beide naalden. De gemiddelde koers, in de 5de kolom, is de koers van het schip gerekend naar eene lijn die den hoek ψ midden door deelt. Men merke op, dat in de beide eerste standen van het schip, zijne rigting *tusschen* de beide naalden inloopt; iets dat bij de dadelijke opteekening terstond in het oog valt. De getallen in de 6de kolom zijn berekend uit die in de 4de kolom, door de formule

$$Tang.\, x = 0{,}06165 \times Tang.\, \tfrac{1}{2}\psi \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ pag. } 18^*.$$

De schijnbare koers a' wordt gevonden door van de gemiddelde koers het getal x *af te trekken*, omdat de eerste (de schijnbare) koers nader bij de bovenste dan bij de onderste naald valt. Hadden de naalden anders om afgeweken, dat is de onderste naar het Oosten, de bovenste naar het Westen, dan zoude het getal x opgeteld hebben moeten worden. Bij eene dadelijke opteekening vallen deze bijzonderheden terstond van zelf in het oog. De koers a' is de koers welke door de onderste of bovenste naald zoude aangewezen zijn zoo *een alleen*, buiten de andere, aanwezig was geweest. — De 9de kolom eindelijk bevat de intensiteiten berekend uit de hoeken ψ van de 4de kolom.

Men ziet uit deze 4de kolom hoe groot de invloed van de verschillende rigtingen van het schip op den hoek ψ tusschen de naalden geweest is, en men kan ook opmerken, bij vergelijking met de getallen in de 8ste kolom, dat het maximum, en het minimum van ψ ongeveer overeenstemmen met de afwijkingen *nul*.

Om uit de gedane waarnemingen de constanten der formule voor de afwijkingen r, p, q, m, n en de constante N (voor de krachten) te bepalen, heeft men eerstelijk 8 vergelijkingen van den vorm

$$Sin.\,\varphi = r\, Cos.\,\varphi + m\, Sin.\, a' + n\, Cos.\, a' + p\, Sin.\,(a' + a) + q\, Cos.\,(a' + a),$$

waarin φ de afwijking van het kompas (8ste kolom) voorstelt.

Deze 8 vergelijkingen oplossende naar de manier der kleinste quadraten, — doch met eenige bekorting — heb ik gevonden

$$r = +\,0{,}0167 \qquad m = +\,0{,}1953$$
$$p = -\,0{,}0377 \qquad n = -\,0{,}3162$$
$$q = -\,0{,}0041$$

Ten tweede heeft men 8 vergelijkingen van den vorm:

$$\frac{i}{N} = Cos.\,\varphi + r\, Sin.\,\varphi - m\, Cos.\, a' + n\, Sin.\, a' - p\, Cos.\,(a' + a) + q\, Sin.\,(a' + a)$$

Waaruit, ter bepaling van N, door zamenstelling der vergelijkingen, volgt

$$\frac{1}{N}\Sigma\, i = \Sigma\, Cos.\varphi + r\,\Sigma\, Sin.\varphi - m\,\Sigma\, Cos.a' + n\,\Sigma\, Sin.a' - p\,\Sigma\, Cos.(a'+a) + q\,\Sigma\, Sin.(a'+a),$$

of in getallen

$$\frac{1}{N}\times 7{,}6613 = 7{,}705 + 0{,}163\times r + 0{,}842\times m - 1{,}196\times n - 0{,}187\times p - 0{,}010\times q.$$

Indien de rigtingen van het schip geordend geweest waren volgens de schijnbare streken a', dan zouden m en n geheel uit deze som verdwenen zijn. Stellende in de bekomen som de gevonden waarden van r, p, enz. komt

$$\frac{1}{N} = 1{,}0780; \qquad N = 0{,}9277.$$

De intensiteit van het magnetismus is dus gemiddeld aan boord ruim 7 procent geringer dan aan wal, ten gevolge der omringing door ijzer.

N gevonden zijnde, kunnen de 8 laatstgenoemde vergelijkingen gesteld worden onder de gedaante:

$$\left(\frac{i}{N} - Cos.\varphi - r\,Sin.\varphi\right) = -m\,Cos.a' + n\,Sin.a' - p\,Cos.(a'+a) + q\,Sin.(a'+a),$$

waarvan dan het eerste lid *hoofdzakelijk* van i afhangt, en verder van de tweede magten en producten der getallen m, n, p enz. voorkomende in $Cos.\varphi = \sqrt{1 - Sin.^2\varphi}$ en in $r\,Sin.\varphi$. Deze laatste 8 vergelijkingen, op dezelfde wijze als de eerste 8 opgelost zijnde, gaven

$$p = -0{,}0494, \qquad m = +0{,}1990,$$
$$q = -0{,}0088, \qquad n = -0{,}3250.$$

Deze getallen nagenoeg overeenstemmende met de eerst gevondene waarden, zoo blijkt, dat de afwijkingen van het kompas even goed door de verschillende hoeken ψ tusschen de beide naalden van het Intensiteits-kompas gevonden worden als uit dadelijk waargenomene afwijkingen. — Het is in het gegeven geval onzeker, welke uitkomsten de voorkeur verdienen, de eerste uit de afwijkingen, of de laatste uit de intensiteiten. Naar het mij voorkomt verdienen zelfs de laatste de voorkeur; en de reden hiervoor is, dat er eenige onzekerheid is overgebleven in de bepaling van de rigting van het schip, op het oogenblik der opteekening van den hoek ψ. De rigting toch van het schip is dan opgemaakt uit eene zoo veel mogelijk gelijktijdige opteekening

van het scheeps-kompas, dat weder ook voor zijne eigene afwijkingen moest verbeterd worden. De waargenomen afwijkingen $\varphi = a' - a$, berusten alzoo eigenlijk op de vergelijkingen van twee kompassen, en het is wel bekend dat zulk eene vergelijking veel minder zeker gaat, dan eene regtstreeksche bepaling der afwijking, b. v. door de peiling van een ver verwijderd voorwerp met een daartoe behoorlijk ingerigt werktuig.

Wij hebben alzoo de volgende uitkomsten:

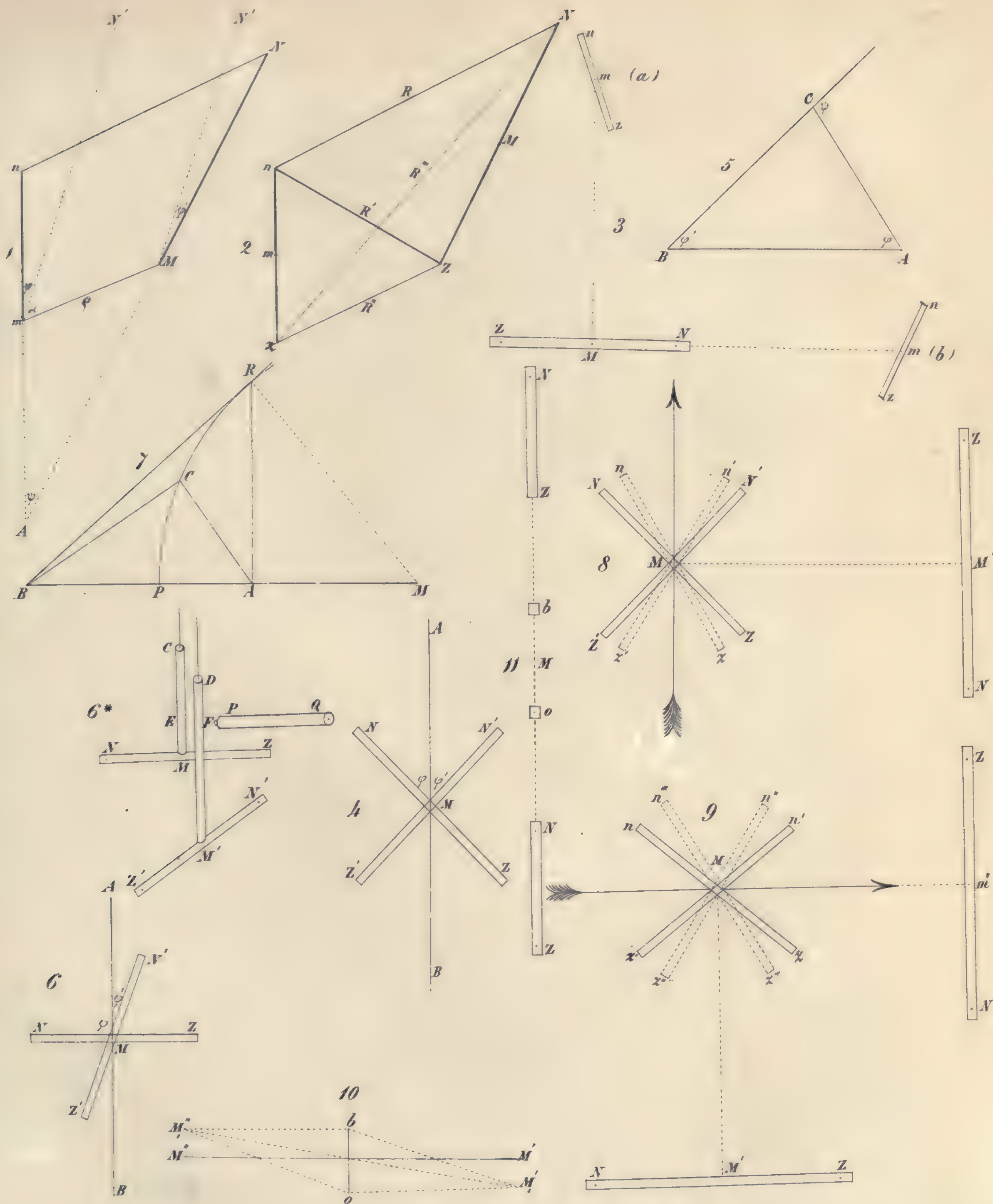
1°. Door de afwijkingen op de gewone wijze.	2°. Door het Intensiteits-kompas.	Gemiddeld.
$r = + 0{,}0167$	$N = 0{,}9277$	
$p = - 0{,}0377$	$p = - 0{,}0494$	$p = - 0{,}0431$
$q = - 0{,}0041$	$q = - 0{,}0088$	$q = - 0{,}0061$
$m = + 0{,}1953$	$m = + 0{,}1990$	$m = + 0{,}1971$
$n = - 0{,}3162$	$n = - 0{,}3250$	$n = - 0{,}3206$

De grootheden N, r, p, q, als standvastigen op deze wijze bekend zijnde, zouden de beide andere m en n, bij veranderde magnetische toestanden door de waarnemingen van de hoeken ψ volgens de ontwikkelde formulen gevonden kunnen worden, zoo het intensiteits-kompas op dezelfde plaats aan boord gebleven was, waar het, alleen ter beproeving, gestaan had.

Sedert heb ik nog gelegenheid gehad dezelfde vereeniging van de twee naalden op een ander ijzeren schip te beproeven. De toestel was daartoe eenvoudig in de kajuit op de tafel geplaatst, en, zoo als uit het voorgaande duidelijk is, men behoefde de kajuit niet te verlaten, om omtrent de afwijkingen van het daar staande kompas ingelicht te worden.

Amsterdam, April 1859.





Lith. v. Meijer & Co.

ONTLEEDKUNDIG ONDERZOEK

VAN DEN

POTTO VAN BOSMAN

DOOR

F. A. W. VAN CAMPEN, *Med. Cand.*

UIT ZIJNE NAGELATEN AANTEEKENINGEN BIJEENGEBRAGT

DOOR

J. VAN DER HOEVEN.

Uitgegeven door de Koninklijke Akademie van Wetenschappen.

MET DRIE PLATEN.



AMSTERDAM,
C. G. VAN DER POST.
1859.

ONTLEEDKUNDIG ONDERZOEK

VAN DEN

POTTO VAN BOSMAN

DOOR

F. A. W. VAN CAMPEN, *Med. Cand.*

UIT ZIJNE NAGELATEN AANTEEKENINGEN BIJEENGEBRAGT DOOR

J. VAN DER HOEVEN.

VOORBERIGT.

De *Potto* van Bosman is eene soort van *Stenops,* omtrent welke ik reeds vroeger (in 1850) der Eerste Klasse van het voormalig Koninklijk Nederlandsche Instituut eene verhandeling aanbood, die in het vierde Deel der derde Reeks harer Verhandelingen werd opgenomen. Het is mij aangenaam, dat ik dit vroeger weinig bekend dier thans, vollediger, dan ik mij ooit had durven voorstellen, kan doen kennen, en dat de bouwstoffen mij daartoe zijn toegevloeid, gelijk tot het onderzoek van den, door mij het eerst bekend geworden mannelijken *Nautilus pompilius.*

De Heer Boomsma, voormalig Eerste Officier van Gezondheid tweede klasse op Elmina, aan de kust van Guinea, had de goedheid mij in November 1856 twee exemplaren van den *Potto,* op spiritus bewaard, toe te zenden, welke ik in den aanvang van 1857 ontving. Ik vertrouwde daarvan het ontleedkundig onderzoek toe aan den Heer F. A. W. van Campen, Candidaat in

de Geneeskunde aan de Leidsche Hoogeschool, die het tot onderwerp zijner Dissertatie zoude maken.

Weldra echter bleek het, dat de ontleedkundige beschrijving van dit dier te uitgebreid en vooral bij de uitgave te kostbaar zoude worden voor het oorspronkelijk doel. Thans is deze arbeid de nalatenschap geworden van den aan de wetenschap vroeg ontrukten, ijverigen jongen ontleedkundige, die op den 17den Januarij 1859 plotseling overleed *.

Ik ontving die nalatenschap van zijne nabestaanden. Veel was daarvan reeds voor de pers in orde gebragt; de laatste hand heeft de schrijver aan zijnen arbeid niet kunnen leggen, en het scheen wenschelijk, het geheel eenigermate om te werken, en tevens, door bijvoeging van enkele aanhalingen, de vergelijking met andere verwante soorten gemakkelijk te maken. Ik heb die taak op mij genomen, en bied thans deze Verhandeling aan de Akademie van Wetenschappen aan. De aan haar toegevoegde afbeeldingen zijn gedeeltelijk mijn werk en voor een deel dat van mijnen zoon, thans Doctor in de Genees- en Heelkunde te Rotterdam, die met v. Campen gelijktijdig aan de Leidsche Hoogeschool gestudeerd heeft. Daar v. Campen zelf niet teekende, werd onze hulp hier door hem ingeroepen, en werd zij hem gaarne en gewillig bewezen. Ik vlei mij, dat deze ontleedkundige onderzoeking als eene vrij volledige monographie te beschouwen is, vooral voor het been-, spier-, vaat- en zenuwstelsel, gelijk wij tot nog toe van weinige zoogdieren bezitten.

---

* Hij leed sedert lang aan organische gebreken van het hart en de ademhalingswerktuigen. Hij was te Overschie 6 Dec. 1831 geboren. Zijn, vóór hem reeds overleden, vader was de Landmeter van Rhijnland W. J. van Campen, door wien een zeer naauwkeurige platte grond der stad Leiden uitgegeven is.

INLEIDING.

De kleine groep van zoogdieren, die men Lemuriden of Spookdieren noemt, werd door mij in eene proeve van Monographie voor 15 jaren behandeld *. Ik zal thans niet herhalen wat in die Verhandeling kan worden nagezien. Omtrent de ontleedkundige kennis, die wij van deze dieren bezitten, geloof ik dat de billijkheid vordert te erkennen, dat zij vooral in onzen leeftijd en wel voor een groot gedeelte door Nederlandsche onderzoekers verkregen is.

In den aanvang dezer eeuw gaf een bekend duitsch Natuuronderzoeker, die zich later in Moscou gevestigd heeft, G. FISCHER, een werk over de Lemuriden uit, hetgeen hoofdzakelijk over de osteologie handelde †. H. KUHL en VAN HASSELT, die in onze Oost-Indische bezittingen hun veelbelovend leven eindigden, maakten vóór hunne reize in 1820 eenige beknopte aanteekeningen bekend over de ingewanden van *Otolicnus madagascariensis* en van *Stenops gracilis* §. Dr. A. SMITH gaf ontleedkundige aanteekeningen omtrent *Galago Moholi* van Zuid-Africa **. H. BURMEISTER gaf eene voortreffelijke ontleedkundige Monographie van het geslacht *Tarsius* ††.

Het geslacht *Stenops* is bijzonder onderzocht door de H.H. SCHROEDER VAN DER KOLK en W. VROLIK §§. Omtrent den *Potto* van BOSMAN, dien ik

* *Bijdragen tot de kennis van de Lemuridae of Prosimii. Tijdschrift voor natuurlijke Geschiedenis en Physiologie, uitgegeven door* J. VAN DER HOEVEN *en* W. H. DE VRIESE, Leiden 1844. Dl. XI. bl. 1—48. Pl. I—III.

† GOTHELF FISCHER'S *Anatomie der Maki und der ihnen verwandten Thiere.* I^r. Bd. (*enthält die Naturgeschichte und den Knochenbau der Maki, mit 24 Kupfertafeln u. zwei Vignetten*). Frankfurt a. Main 1804. 4°. (Dit werk is niet verder voortgezet.)

§ *Beiträge zur Zoologie und vergleichenden Anatomie. Mit Abbildungen.* Frankf. a. Main 1820. 4°. 2te *Abtheilung, Vergl. Anatomie,* S. 35—38.

** *Illustrations of the Zoology of South-Africa,* I. Tab. 8. 8 bis.

†† *Beiträge zur nähern Kenntniss der Gattung Tarsius. Mit 7 Tafeln.* Berlin 1846. 4°.

§§ J. L. C. SCHROEDER VAN DER KOLK, *Bijdrage tot de Anatomie van den Stenops Kukang* (*Nycticebus Javanicus*). *Tijdschr. voor natuurl. Gesch. en Physiol.* VIII. 1841. I. bl. 277—336. Plaat V.

Recherches d'Anatomie comparée sur le genre Stenops d'Illiger par W. VROLIK. *Nieuwe Ver-*

als eene soort van dit geslacht leerde kennen, werden door mij eenige ontleedkundige bijzonderheden medegedeeld *. De *Otolicnus Peli* eindelijk, eene kleine soort van Galago van de westkust van tropisch Africa, maakte het onderwerp uit van het akademisch Proefschrift van Dr. HOEKEMA KINGMA †.

Dit beknopt overzigt der litteratuur van de vergelijkende ontleedkunde van de Lemuriden bewijst genoegzaam, dat wij niet ten onregte beweerd hebben, dat vooral in ons vaderland voor dit gedeelte der wetenschap zeer veel werd bijgedragen. Dat voor het overige vele bijzonderheden omtrent het maaksel der Lemuriden in de algemeene werken over vergelijkende ontleedkunde, vooral in die van CUVIER en J. F. MECKEL, geboekt zijn, behoeft naauwelijks herinnerd te worden.

Uit al deze onderzoekingen is voldoende gebleken, dat de Lemuriden eene zeer natuurlijke groep van zoogdieren uitmaken, die in vele bijzonderheden der inwendige structuur geheel met elkander overeenstemmen. Het meest afwijkend en eenigermate op zich zelf staand geslacht in deze groep is *Tarsius*, bij hetwelk de vier snijtanden der bovenkaak digt bijéén staan, terwijl bij al de overige geslachten deze tanden in twee paren geplaatst zijn, die door eene middelruimte zonder tanden aan de voorzijde worden afgescheiden.

Dat de *Pottò* van BOSMAN zijne naaste verwanten heeft in de twee Oost-Indische soorten *Stenops tardigradus* en *Stenops javanicus*, en in geen afzonderlijk geslacht (*Perodicticus* BENNETT) behoeft geplaatst te worden, had ik vroeger (reeds in 1851) getracht aan te toonen, en wordt door de nu volgende onderzoekingen nog nader gestaafd. Ik noem deze soort *Stenops*

---

handelingen der Eerste Klasse van het Koninkl. Nederl. Instituut, Amsterdam 1844. X. bl. 75—112. Pl. I—III.

Antwoord van J. L. C. SCHROEDER VAN DER KOLK *op eenige aanmerkingen, welke op deszelfs bijdrage tot de Anatomie van den Stenops Kukang door den Hoogleeraar* W. VROLIK *gemaakt zijn. Tijdschr. voor nat. Gesch. en Physiol.* XI. I. bl. 123—156. Pl. V.

Beide, over sommige punten van elkander verschillende, schrijvers vereenigden later hunne onderzoekingen, en voegden daarbij eenige nieuwe bijzonderheden, vooral omtrent de hersenen, in de *Bijdragen tot de Dierkunde, uitgegeven door het Genootschap Natura Artis Magistra.* I Deel. Amsterdam 1851, 2e. Aflevering. 4°. *Recherches d' Anatomie comparée sur le genre Stenops d' Illiger par* J. L. C. SCHROEDER VAN DER KOLK *et* W. VROLIK, p. 29—52.

* *Bijdrage tot de kennis van den Potto van* BOSMAN. Met 2 platen. *Verhandelingen der Eerste Klasse van het Koninklijk Nederlandsche Instituut*, 3e Reeks, 4e Deel. Amsterdam 1851.

† *Eenige vergelijkend-ontleedkundige Aanteekeningen over den Otolicnus Peli. Eene Akademische Proeve door* P. HOEKEMA KINGMA. Leiden 1855. 8°. (met elf figuren).

Potto, en onderscheid haar van de overige soorten, die of in 't geheel geen staart hebben (*Stenops gracilis*) of slechts een rudiment daarvan vertoonen, door den staart, die nagenoeg $\frac{1}{5}$ van de geheele lengte uitmaakt, en door den zeer korten wijsvinger zonder nagel (*Stenops, cauda brevi, indice in manu brevissimo, mutico*).

Synonymen zijn: *Lemur Potto* Gm., *Nycticebus Potto* Geoffr., *Perodicticus Geoffroyi* Bennett.

ONTLEEDKUNDIGE BESCHRIJVING.

UITWENDIGE GEDAANTE. HAARBEKLEEDING. AFMETINGEN.

De *Potto* * van Bosman is nu reeds door drie afbeeldingen bekend, van welke de laatste, door den Heer H. Schlegel geleverd, de beste is †. Alle zijn echter naar opgezette voorwerpen geteekend. Eene afbeelding naar het levend dier bezitten wij niet, tenzij men de zeer onvoldoende figuur van Bosman, den eersten ontdekker der soort, als zoodanig wilde aanmerken, welke afbeelding evenwel naauwelijks eene aanhaling waardig is.

Het dier is over het geheele ligchaam met digt, zacht, wollig haar bekleed. De haren zijn het langst, en staan het digst bijéén over den geheelen rug en den staart; aan de buikvlakte is het haarkleed dunner en zijn de haren korter. Ook aan de ledematen is de rugvlakte digter en lan-

* De naam *Potto* wordt ook aan een geheel ander zoogdier uit Zuid-Amerika gegeven, 't welk reeds in 1771 door Vosmaer beschreven en afgebeeld is; het is de *Cercoleptes caudivolvulus* van Illiger. Is de naam *Potto* misschien door slaven van de Guineesche kust naar Amerika overgebragt en op een ander dier toegepast, waarin zij eenige gelijkheid met den *Potto* van hunnen geboortegrond meenden te zien? Thans is de *Potto* aan de kust van Guinea bij negers onder den naam *Aposo* bekend, 't geen misschien slechts eene wijziging van *Potto* is.

† De eerste afbeelding is die, volgens een jong en onvolwassen voorwerp, welke door mij gegeven werd in 1844 in het *Tijdschrift voor natuurl. Gesch.* enz. XI, Pl. 2; de tweede, eene verkleinde en ongekleurde afbeelding naar een volwassen voorwerp, in 1851 in het vierde deel der derde reeks van de *Verhandelingen der Eerste Klasse van het Kon. Nederl. Instituut.* — De afbeelding van den Heer Schlegel verscheen in 1853 in de vijfde aflevering der *Bijdragen tot de Dierkunde, uitgegev. door het Genootschap Nat. Artis Mag. te Amsterdam*, met een kort berigt van den Heer H. S. Pel.

ger behaard dan de buikvlakte. De hand en voet zijn op de rugvlakte met korte haren bekleed, de binnenvlakte is onbehaard; eene dikke, eeltachtige huid bedekt de handpalm en de voetzool. De kop is bijkans geheel behaard; alleen op den neus en rondom den mond is het haar zeer dun, zoodat de kleur der huid doorschemert. Hetzelfde is het geval met het *scrotum* en den *penis*.

Aan den rug, den staart en de rugvlakte der ledematen zijn de haren aan den grond licht ros en aan den top zwart gekleurd. Aan de buikvlakte van den romp en de binnenvlakte der ledematen zijn de haren lichter van kleur, nagenoeg grijsachtig rood.

Bij mikroskopisch onderzoek onderscheidt men aan alle haren duidelijk eene merg- en bast-zelfstandigheid, die ieder nagenoeg de helft van de dikte der haren uitmaken. In de mergzelfstandigheid ziet men over het algemeen eene enkele rij van vrij groote, vierhoekige cellen, zoodat het haar inwendig uit geledingen schijnt te bestaan; slechts bij enkele dikkere haren vindt men bij uitzondering verscheidene kleinere cellen onregelmatig nevens elkander geplaatst. In de cellen der *substantia medullaris* onderscheidt men eene duidelijke kern en eenen korreligen inhoud. Op de plaatsen, waar de haren zwart zijn gekleurd, zijn de cellen geheel met pigment gevuld. Aan de fijne spits van het haar ontbreekt de mergzelfstandigheid.

Lange speurharen aan het aangezigt, zoo als bij *Tarsius* voorkomen, zijn hier niet aanwezig. De haren van den staart onderscheiden zich niet van die van den rug, maar zijn alleen iets langer.

Bij de beschrijving van den uitwendigen vorm verdienen nog eenige uitsteeksels vermelding, die men in den nek aantreft. Het zijn de verlengde doornuitwassen der vijf onderste hals- en twee bovenste rugwervels; deze uitsteeksels liggen derhalve in het midden van den nek; de drie bovenste zijn slechts klein, en verheffen zich weinig boven de huid; de vier onderste daarentegen zijn sterk ontwikkeld en zeer zigtbaar. Gemelde doornuitwassen dringen door het corium heen, en zijn slechts door het beenvlies en eene verdikte onbehaarde opperhuid bekleed *. Welk doel deze doornen in den nek hebben, is niet wel te gissen.

---

* Volgens de mededeeling van den Prosector aan het Museum anatomicum der Leidsche Hoogeschool Dr. J. A. Boogaard, die op mijn verzoek de bekleedsels dezer doornuitwassen aan een nader onderzoek onderwierp, vertoont zich een vezelachtig weefsel, dat zich op vele plaatsen in verschil-

Wij laten hier de afmetingen der twee onderzochte voorwerpen volgen.

	A.	B.
	m.	m.
Lengte van het ligchaam (kop, hals en romp), zonder den staart.	0,326.	0,342.
» » den staart zonder de haren	0,078.	0,079.
» der voorste ledematen	0,192.	0,195.
Lengte der achterste ledematen.	0,225.	0,225.
Afstand tusschen beide oogen	0,014.	0,014.
» van de spits van den snoet tot de oogen	0,020.	0,022.
» » » » » » » » » ooren	0,045.	0,053.
Vingers der voorste ledematen.		
Lengte van den duim	0,020.	0,021.
» » » wijsvinger	0,008.	0,009.
» » » derden vinger	0,028.	0,030.
» » » vierden »	0,038.	0,032.
» » » vijfden »	0,029.	0,025.
Vingers (toonen) der achterste ledematen.		
Lengte van den grooten toon	0,022.	0,023.
» » » tweeden » (zonder den nagel)	0,011.	0,016.
» » » derden »	0,025.	0,029.
» » » vierden »	0,030.	0,031.
» » » vijfden »	0,029.	0,027.

Uit deze afmetingen blijkt, dat de lengte der afzonderlijke deelen niet altijd in verhouding volkomen beantwoordt aan de lengte van het geheele ligchaam. Het voorwerp B was grooter, maar de achterste ledematen verschilden niet in lengte van die van het kleinere A, en de vierde en vijfde vinger en de vijfde toon waren zelfs kleiner dan bij dit voorwerp. Overigens is de kleinheid van den tweeden vinger (den wijsvinger) in het oogloopend, eene kleinheid, die ook, in veel minder mate nogtans, bij de overige soorten van

---

lende plaatjes laat scheiden, terwijl echter deze plaatjes geheel hetzelfde voorkomen hebben, zoodat er geen grond bestaat behalve het periosteum ook nog een afgescheiden *corium* aan te nemen. Op dat vezelachtig weefsel ziet men eene epithelium-laag, zoo het schijnt uit zamengesteld plaat-epithelium, waarvan de cellen gedeeltelijk pigment bevatten (29 Junij 1859).

Stenops wordt opgemerkt. Dat de vierde vinger bij voor- en achterpooten de langste van alle is, wordt bij alle soorten der Lemuriden opgemerkt, en houde ik voor een der beste kenmerken, waardoor deze groep zich van de overige vierhandige dieren onderscheidt.

BESCHRIJVING VAN HET BEENGESTEL.

Het beenstelsel van den *Potto* is in 't algemeen vrij stevig in verhouding tot de grootte en de geheele ontwikkeling van het dier. Het verschilt over 't geheel slechts weinig van dat van *Stenops javanicus* en *Stenops tardigradus*. Inzonderheid is deze gelijkvormigheid duidelijk uitgedrukt in den beenigen kop.

§ 1. *Het beenige hoofd.*

De schedel heeft eene breed-eironde gedaante, en is van achteren iets breeder dan van voren. Het groote achterhoofdsgat is nagenoeg geheel naar achteren geplaatst, terwijl het bij vele andere Lemuriden, b. v. bij *Tarsius, Otolicnus* en ook bij *Stenops gracilis* meer naar voren ligt, en naar beneden is gerigt. Het aangezigt steekt ver vooruit, en is van achteren zeer breed, wegens de wijde oogholten; de bek loopt echter niet spits toe, maar is van voren nagenoeg even breed als van achteren. Het jukbeen en de jukboog zijn zeer stevig en breed; de ring der oogkas is volkomen, maar naar achteren is de oogholte geheel open en niet van de slaapgroeve gescheiden *.

Wanneer wij, na deze algemeene opmerkingen, de verschillende deelen van het beenig hoofd nader onderzoeken, zoo vinden wij vooreerst aan het schedeldak het voorhoofdsbeen door een' naad in twee helften verdeeld. De afstand tusschen de *lineae semicirculares* der wandbeenderen is grooter dan bij de overige soorten van *Stenops*. Boven het achterhoofdsgat ziet men aan

---

* Dit is een hoofdkenmerk van het beenige hoofd, waardoor zich deze familie van die der apen onderscheidt. De sluiting der oogkassen door de groote vleugels van het wiggebeen, welke zich bij de apen gelijk bij den mensch aan het jukbeen voegen, vindt men bij de Lemuriden niet. VAN DER HOEVEN, *Tijdschr. voor nat. Gesch.* enz. XI, bl. 15.

het achterhoofdsbeen eene uitpuiling, die bij alle Lemuriden voorkomt, en waaraan in de binnenvlakte van den schedel eene eironde groeve beantwoordt, waarin de *vermis superior* der kleine hersenen gelegen is.

De schedelholte is ruim, en vertoont op den bodem, even als bij den mensch, drie afzonderlijke schedelgroeven *. De voorste dezer groeven wordt gevormd door het dak der oogkassen en eene in het midden liggende, diepe kuil (neusgroeve), waarvan de *lamina horizontalis* van het zeefbeen den bodem uitmaakt. Deze plaat bezit talrijke gaten, maar wordt niet door eene *crista galli* in tweeën verdeeld. De middelste schedelgroeve ligt veel lager dan de voorste, maar overigens zijn beide niet zoo scherp van elkander gescheiden als bij den mensch; want, daar de *fissura orbitalis superior* ontbreekt, mist men ook eenen vrijen rand aan de kleine wiggebeensvleugels. Het ligchaam van het wiggebeen, in het midden van deze schedelgroeve gelegen, is zeer laag, en bestaat slechts uit twee dunne beenplaten, door eene geringe laag van diploë gescheiden. Op de bovenvlakte ziet men eene vlakke groeve voor de *hypophysis cerebri*. Kort vóór het ligchaam van het wiggebeen ziet men aan weèrszijde twee gaten; het voorste van deze gaten is het *foramen opticum* tot doorlating van de gezigtszenuw; het andere, dat daarachter en meer naar buiten ligt, is het *foramen rotundum*, waardoor echter niet alleen de tweede tak van het vijfde paar heengaat, maar tevens ook de zenuwen doorloopen, die bij den mensch door de *fissura orbitalis superior* de schedelholte verlaten †. Meer naar achteren, vóór den top der piramide van het slaapbeen, ligt eene groote, ronde opening, waardoor de inwendige strotslagader in de schedelholte dringt, om verder langs den *sulcus caroticus* ter zijde van het ligchaam van het wiggebeen naar voren te loopen §. Aan de buitenzijde van dit *foramen caroticum* vindt men het *foramen ovale*, tot

---

* Vergelijk fig. 1.

† Dit gat wordt als de *fissura orbitalis superior* door den Heer W. VROLIK bij *Stenops tardigradus* en *javanicus* beschreven. Hij werd hierin voorgegaan door CUVIER, die bij de Lemuriden (*les loris, les galagos, le tarsier*) aanteekent: „*la fente orbitaire est un trou rond comme le trou optique.*" *Leç. d'Anat. comp.* 2de éd. 1837. II. p. 463. De redacteurs der tweede uitgave voegen hierbij, dat bij den *Avahi* (onzen *Lichanotus Avahi*) het ronde gat met de *fissura orbitalis superior* zamenvloeit. In de eerste uitgave der *Leçons d'Anat. comp.* (II. 1805) vind ik bij de gaten van den schedel der zoogdieren niets van de Lemuriden vermeld.

§ Een *canalis caroticus*, zoo als bij den mensch, is dus niet aanwezig.

doorgang van den derden tak van het vijfde paar, den *nervus inframaxillaris* *. Een *foramen spinosum* ontbreekt op de gewone plaats, maar in het buitenste gedeelte van de middelste schedelgroeve is eene kleine opening, die beschouwd moet worden aan dit gat te beantwoorden, als waardoor een tak van de *art. maxillaris,* eene *art. meningea,* in de schedelholte komt. Van deze opening gaan dan ook talrijke groeven uit, en loopen langs de binnenste oppervlakte van den schedel.

Ter zijde wordt de middelste schedelgroeve door den bovenrand der piramide van het slaapbeen volkomen van de achterste schedelgroeve gescheiden; in het midden daarentegen gaan beide bijkans onmerkbaar in elkander over, doordien het *dorsum ephippii* ontbreekt. Vóór den top der piramiden heeft men echter een paar uitsteeksels, die in hunne plaatsing met de *processus clinoidei posteriores* overeen komen. Tusschen deze uitsteeksels en den scherpen bovenrand der piramiden is eene diepe groeve (*cavum Meckelii*), waarin het *ganglion Gasseri* gelegen is. In een der schedels liep aan de regterzijde de beenrand over deze groeve heen, zoodat hier de *nervus trigeminus* met het *ganglion* door een gat heen ging. Aan de achterste schedelgroeve bespeurt men in het midden eene zeer breede, diepe sleuf voor het verlengde merg en den *Pons Varolii.* Aan de achtervlakte van het rotsbeen ligt vooreerst de *porus acusticus internus* op de gewone plaats; daar achter is eene diepe kuil, waarin de *flocculus* der kleine hersenen verborgen was; aan de binnenzijde van deze holte ligt de *aquaeductus vestibuli.* Het *foramen jugulare,* op de gewone wijze gevormd, wordt echter (zoo als dit ook nu en dan bij den mensch plaats heeft) door een dun beenplaatje in tweeën verdeeld: de voorste opening dient tot doorgang van den *nervus glossopharyngeus, n. vagus* en *n. accessorius Willisii;* door de achterste gaat de *vena jugularis cerebralis* naar de schedelholte, en van deze opening af loopt dan ook de *sulcus transversus* naar buiten en boven, omgeeft vervolgens de vroeger vermelde groef in het schedeldak, waarin de

---

* Cuvier schijnt t. a. p. het *foramen caroticum* voor het *foramen ovale* te hebben gehouden, en plaatst nu het *foramen rotundum* aan de buitenzijde van dit eironde gat: „*le trou rond est fort en arrière sur la même ligne transverse et en dehors du trou ovale.*" Even eens zijn ook deze gaten benoemd door den Heer W. Vrolik (*Nieuwe Verhand. der Eerste Kl.,* Dl. X. bl. 100; *Recherches d'Anat. comp., Bijdragen tot de Dierkunde,* I. p. 40). Het is blijkbaar, dat hier het *foramen ovale* voor het *foramen rotundum* werd aangezien.

vermis superior cerebelli gelegen is, en gaat daarna in den *sulcus longitudinalis* over *.

Vóór en aan de buitenzijde van het groote achterhoofdsgat ziet men het *foramen condyloideum anterius.* Het *foramen condyloideum posterius* ontbreekt.

De grondvlakte des schedels † is, vooral in het midden, zeer dun, ofschoon de beenderen van den kop overigens eene normale dikte hebben. De achterhoofdsknobbels ter zijde van het groote achterhoofdsgat bieden niets opmerkelijks aan, en hebben nagenoeg dezelfde gedaante als bij den mensch. De gehoorblazen (*bullae tympani*) zijn groot, en hebben eene peervormige gedaante. De breede achtereinden staan ver uitéén, terwijl de, puntig eindigende, voorste gedeelten tot elkander naderen. Op het midden van deze gehoorblazen zijn de kleine horens van het tongbeen ingehecht, en aan den binnenrand ligt het *foramen jugulare.* Vóór den top der gehoorblazen bevindt zich het *foramen caroticum.* Het *foramen ovale* wordt aan de benedenvlakte overdekt door een dun beenplaatje, dat zich van den achterrand der onderste plaat van de *processus pterygoidei* naar den voorrand der gehoorblaas uitstrekt. Voor het overige hebben de *processus pterygoidei* de gewone gedaante; de buitenste plaat is breed, de binnenste smal, en eindigt in een naar achteren omgeslagen haakje (*hamulus pterygoideus*). Tusschen het *foramen caroticum* en *foramen ovale* vindt men, aan den voorrand der gehoorblaas, de opening der beenige *tuba Eustachii,* die, in het kraakbeenige gedeelte dezer buis overgaande, op de gewone plaats in den *pharynx* uitmondt; even als bij den mensch is deze buis slechts een halfkanaal, waaraan de onderrand ontbreekt, die door vezelachtig weefsel wordt gesloten. De *fossa glenoidalis* is eene dwars ovale, vlakke uitholing. De beenige gehoorweg is slechts een halfkanaal, waaraan de onderrand ontbreekt, en in dit halfkanaal zet zich de kraakbeenige gehoorbuis tot aan het trommelvlies voort. Aan den scherpen beenrand, die den gehoorweg naar voren omgrenst, bevindt zich de fijne opening, waar-

---

* Van een beenig *tentorium*, waarvan volgens Meckel bij *Stenops gracilis* een zwak rudiment zou bestaan (*System der vergl. Anat.* II. 2. 1825, S. 604), was hier geen spoor te vinden, evenmin van een' verbeenden *processus falciformis*, waarvan bij die soort van *Stenops* ook eene kleine aanduiding zou aanwezig zijn; Meckel t. a. p., p. 605.

† Zie fig. 2.

door de *arteria meningea* van de *art. maxillaris interna* naar de middelste schedelgroeve heengaat *. Achter den uitwendigen gehoorweg ligt het gat, waardoor de *nervus facialis* naar buiten treedt (*foramen stylomastoideum*).

Met betrekking tot het aangezigt verdient nog vermelding, dat de oogkuilsrand vooral van boven en van binnen scherp vooruitsteekt. Het *foramen supra-orbitale* ontbreekt. De tusschenruimten, waardoor beide oogkassen gescheiden zijn, bedraagt 7 *m. m.* †, terwijl die bij *Stenops tardigradus* slechts 4 of 5 *m. m.* bedraagt, en bij *Stenops gracilis* de oogkassen zoo digt bijéén staan, dat de afstand tusschen beider binnenranden slechts 1 *m. m.* groot is. De ingang van het traanneuskanaal, hetgeen, zoo als bij den mensch, in de neusholte onder de *concha inferior* zijne uitmonding heeft, ligt beneden den binnenooghoek en dus buiten de oogholte, eene bijzonderheid, die ook bij andere Lemuriden voorkomt, en misschien een kenmerk der geheele groep uitmaakt §.

In de vereenigde oogholte en slaapgroeve zijn nog de volgende gaten en kanalen op te merken. In de diepte der oogkas liggen naar achteren het *foramen opticum* en daaronder het *foramen rotundum;* een weinig naar voren van deze gaten vindt men aan den binnenwand der oogkas eene fijne opening (het *foramen ethmoidale anterius*), welke in de schedelholte voert en tot doorgang dient van den *nervus ethmoidalis,* een' tak van den *nervus naso-ciliaris.* Op den bodem (naar onderen) ziet men vooreerst geheel aan den achterrand boven den laatsten maaltand twee openingen: de bovenste, grootere voert dwars naar binnen in de neusholte, en laat van den *nervus supramaxillaris* een' sterken tak (*ramus nasalis*) doortreden (het *foramen spheno-palatinum*); de onderste opening gaat over in een kanaal (*canalis pterygopalatinus*), dat schuins naar binnen en voren de verbinding van de *ossa palati* en *processus pterygoidei* doorboort, en den *nerv. palatinus* van den tweeden tak des vijfden zenuwpaars doorlaat. Vóór deze gaten begint de groef, die in het onderoogkaskanaal overgaat, 't geen op de gewone

---

* Zie boven bl. 9, 't geen omtrent het *foramen spinosum* gezegd is.

† Ik vond dien afstand zelfs 9 *m. m.;* zie mijne *Bijdrage tot de kennis van den Potto van* Bosman, p. 5.

§ Fischer, *Anatomie der Maki*, I. S. 6, S. 87 ff.; W. Vrolik, *Nieuwe Verhandelingen*, enz. X. bl. 98; van der Hoeven, *Tijdschr. voor natuurl. Gesch. en Physiol.* XI. bl. 16; Kingma, t. a. p. bl. 15.

plaats op de voorvlakte uitmondt (*foramen infra-orbitale*). Bij het eene voorwerp waren twee kleinere *foramina infra-orbitalia* aanwezig, 't geen ook bij andere Lemuriden werd opgemerkt. Eindelijk ziet men op den bodem der oogkas, boven en vóór den ingang van het *canalis infra-orbitalis,* een gat, waardoor de *ramus dentalis superior* van den meer gemelden tweeden tak des vijfden paars naar het *antrum Highmori* verloopt. Een *foramen zygomaticum* ontbreekt.

Aan het beenige verhemelte heeft men, behalve de uitmondingen der *canales pterygopalatini,* onmiddellijk achter de snijtanden twee groote *foramina incisiva,* die in de neusholte voeren. Het *os intermaxillare* is klein, maar verbindt zich toch even als bij *Stenops gracilis* met de zijden der neusbeenderen, en omgeeft met deze de neusopening. De onderkaak, even als bij de overige Lemuriden uit twee helften bestaande door eene *symphysis* aan de kin vereenigd, heeft eenen breeden zijtak met een' grooten *processus coronoideus,* die ver boven den jukboog uitsteekt en naar achteren gebogen is; de hals of het uitsteeksel, hetgeen den *condylus* draagt, is daarentegen zeer kort *. De onderkaak wordt voorts op de gewone wijze door het tandkaskanaal doorboord; aan het *foramen maxillare internum* bemerkt men geene *lingula* noch *sulcus mylohyoideus.*

§ 2. *De wervelkolom.*

De wervelkolom is zamengesteld uit 7 halswervelen, 15 borst-, 8 lenden-, 3 zamengegroeide heiligbeens- en 20 staartwervelen.

De halswervelen zijn groot, hunne ligchamen zijn even als bij den mensch aan de boven- en ondervlakte uitgehold. De dwarse uitwassen zijn (met uitzondering van die van den zevenden halswervel) doorboord, tot vorming van een' *canalis vertebralis.* Bij den vierden, vijfden en zesden halswervel, zijn deze uitsteeksels aan den top gespleten; bij de overige eindigen zij in een' enkelvoudigen knobbel. De doornuitwassen der vijf onderste halswervels, gelijk ook die der twee eerste borstwervels, doorboren de lederhuid, zoo als wij vroeger reeds beschreven hebben (bl. 6), en zijn zeer verlengd; aan den

---

* Zie den schedel van ter zijde afgebeeld in *Verh. der Eerste Klasse van het Kon. Nederl. Inst.* 3e Reeks, IVde Deel; *Over den Potto* enz., Pl. II, fig. 2. Voor de beschrijving der tanden, welke met die der overige soorten van *Stenops* overeenstemmen, verwijs ik naar dezelfde Verhandeling, bl. 4, 5. Pl. II, fig. 3, 4.

eersten halswervel ontbreekt het doornuitwas, aan den tweeden is het zeer kort en aan den top gespleten. Aan den *atlas* ziet men achter de *fossae condyloideae,* in plaats van eene groeve of insnijding, een kort kanaal, waardoor de *arteria vertebralis* loopt. Aan den *epistropheus* heeft het *foramen transversarium* dezelfde rigting als bij de overige halswervels, zoodat de wervelslagader minder kromming zal maken, en bijkans in eene regte lijn tot den *atlas* moet opstijgen.

Bij de borstwervels nemen de ligchamen van den eersten tot den zevenden of achtsten in breedte af, en vervolgens tot den laatsten weder toe. De hoogte van het ligchaam der wervels wordt van den eersten tot den laatsten borstwervel steeds grooter. De doornuitwassen zijn lang, en eenigzins schuins naar beneden gerigt.

De lendenwervels verschillen onderling weinig in grootte. Hunne dwarse uitsteeksels zijn sterk ontwikkeld en nagenoeg even lang als de *processus costarii.* De doornuitwassen zijn zeer hoog en zijdelings plat gedrukt (kamvormig).

Het heiligbeen bestaat uit drie onderling vergroeide wervels, die niet breeder zijn dan de lendenwervels. Aan de achterzijde ziet men eene sterke *crista sacralis* en ter zijde eene langwerpig ovale oppervlakte, ter vereeniging met het darmbeen.

De zes of zeven eerste staartwervels vertoonen nog dwarse en schuinsche uitsteeksels; alleen de doornuitwassen ontbreken. In deze wervels zet zich ook het ruggemerg-kanaal nog voort. De overige staartwervels zijn cilindervormige beentjes, die naar het einde steeds dunner worden.

De vereeniging der verschillende wervels geschiedt geheel op dezelfde wijze en door dezelfde banden als bij den mensch. Met betrekking tot de banden tusschen het achterhoofd en de twee eerste halswervels is echter op te merken, dat een eigenlijk *ligamentum cruciatum* ontbreekt, doordien het *ligamentum transversum atlantis* slechts door eene onderste verlenging aan den *epistropheus,* maar geenzins door eene bovenste aan het achterhoofdsbeen verbonden is. De *ligamenta alaria* of *ligamenta Maucharti* zijn stevig en langer dan bij den mensch; een *ligamentum suspensorium dentis* ontbreekt.

§ 3. *Borstkas.*

Er zijn vijftien paren van ribben. De tien eerste vereenigen zich door

haar kraakbeenig einde met het borstbeen *. De ribben der vier volgende paren vereenigen zich door haar kraakbeen met dat der tiende rib. De vijftiende rib is met haar kraakbeenig uiteinde vrij (*costa fluctuans*).

De eerste rib is de kortste van alle en tevens het sterkst gekromd. De daarop volgende nemen tot de tiende of elfde in lengte toe; van de twaalfde tot de veertiende nemen zij weder langzamerhand af; de vijftiende is veel korter dan de veertiende. De ribben worden van boven naar beneden breeder, maar tevens dunner. De *sulcus costalis* is zwak aangeduid. Behalve dat alle ribben door de hoofdjes met twee wervelligchamen verbonden zijn, vereenigen zich de twaalf eerste ook nog door een klein *tuberculum* met de dwarse uitwassen der borstwervels.

Het borstbeen is zeer smal, en bestaat, behalve uit het zwaardvormig aanhangsel en het manubrium, uit acht stukken, die door vezelachtig kraakbeen met elkander verbonden zijn. Het *manubrium sterni* is een breed en plat beenstuk, dat op de gewone plaats de gewrichtsgroeven voor het sleutelbeen aanbiedt. Bovendien is aan den zijrand van het *manubrium* de eerste rib ingehecht, terwijl de tweede tusschen het *manubrium* en het eerste been van het ligchaam van het *sternum* aangehecht is, en de overige ware ribben tusschen twee op elkander volgende beenstukken aan het borstbeen verbonden zijn. De *processus xyphoideus* is een lang, stijlvormig beentje.

§ 4. *Beenderen der voorste ledematen.*

Behalve de hand-beenderen komen die der voorste ledematen in den vorm en de zamenvoeging zeer veel met die van den mensch overeen. Het sleutelbeen heeft nagenoeg dezelfde gedaante als dat van den mensch. In de verbinding van dit been met het borstbeen vindt men ook een *meniscus interarticularis.* Aan het schouderblad valt op te merken, dat de insnijding aan den bovenrand (*incisura scapulae*) zeer gering en naauwelijks zigtbaar, en dat het lange ravenbeksuitsteeksel (*processus coracoideus*) niet door een' band met den schoudertop verbonden is; het *ligamentum coraco-claviculare* daar-

---

* Bij *Stenops tardigradus* en *Stenops javanicus* zijn 16 paren ribben; 15 daarentegen, gelijk bij den *Potto*, bij *Stenops gracilis*. Bij de twee eerstgenoemde soorten zijn de ribben der elf eerste paren aan het borstbeen verbonden; bij *Stenops gracilis* slechts die der 9 eerste paren.

entegen is zeer stevig. De gedaante van het schouderblad is breeder en korter dan bij het menschelijk schouderblad.

Het opperarmbeen onderscheidt zich door een *foramen supra-condyloideum*, eigenlijk een kort kanaal, dat boven den *condylus internus* schuins, van achteren en boven naar voren en onderen, het been doorboort *.

Het schouder- en elleboggewricht vertoonen in hunne zamenstelling niets dat bijzondere vermelding behoeft; ook is de draaijing van het spaakbeen om de ellepijp in dezelfde mate mogelijk als bij den mensch. Het spaakbeen is sterk gebogen. Aan het ondereinde is het zeer breed, en heeft aan den naar de ulna gekeerden rand een uitsteeksel, waarop het *capitulum ulnae* naar onderen door eene geleding verbonden is †. Bovendien bezit het verlengde stijlvormig uitsteeksel der ellepijp (*processus styloideus*) aan zijn ondereinde eene kleine gewrichtsvlakte, die zich met het *os triquetrum* vereenigt. Dit ondereinde vormt alzoo met het ondereinde van het spaakbeen eene concave, van binnen naar buiten vrij breede gewrichtsvlakte, die met drie der handwortelbeentjes der eerste rij, te zamen eene boogvormige bolle vlakte uitmakende, verbonden is. Het *os pisiforme* is lager en meer naar buiten geplaatst, en neemt geen deel aan het handgewricht, hetgeen opmerkelijk is, daar bij vele zoogdieren en ook bij de apen dit been met de ellepijp articuleert. De beursband van het handgewricht wordt, behalve ter zijde door de *ligamenta lateralia*, op de rugvlakte nog versterkt door een bandje, dat van den *radius* in schuinsche rigting naar het *os triquetrum* verloopt. Aan den kant der handpalm onderscheidt men twee versterkingsbanden, een tusschen den *radius* en het *os lunatum* en een ander tusschen den *radius* en het *os triquetrum* uitgespannen.

De handwortel wordt in 't geheel door tien beentjes gevormd, waarbij men nog als elfde een later te vermelden beenplaatje in den dwarsen band van den *carpus* voegen kan. Het *os naviculare* is groot, en heeft aan den radialen rand een uitsteeksel, dat naar de handpalm gekeerd is. Het *os lunatum* is als eene wig tusschen het *os naviculare* en *triquetrum* ingeschoven. Het *os triquetrum* heeft nagenoeg eenen cubischen vorm, en verbindt zich aan den

---

* Zie fig. 3*.

† Dit uitsteeksel van den radius vervangt dus (gelijk VAN CAMPEN opteekende) de plaats van het kraakbeen (*cartilago triangularis*), dat bij den mensch tusschen het *caput ulnae* en het *os triquetrum* gelegen is.

ulnairen rand met het *os pisiforme,* een klein onregelmatig eirond beentje, dat naar de handpalm gerigt is.

Tusschen deze eerste rij van vier beentjes bevindt zich een, ook bij de Apen voorkomend, beentje, 't geen aan de rugvlakte onder het *os naviculare* en *os lunatum* gelegen is, en zich tusschen het boveneinde van het *os hamatum* en *multangulum minus* dwars uitstrekt. Het boveneind van het *os capitatum* loopt daaronder door *.

De tweede rij van den handwortel (die breeder is dan de eerste) bevat vijf beentjes. Het eerste is een klein bijkomend beentje, dat beneden het uiteinde van het *os naviculare* op den binnenrand van den handwortel gelegen en met het *os multangulum majus* verbonden is †. Het *os multangulum majus* is van onderen breed en als in twee vlakke condyli uitloopend, die de geledingsvlakte vormen voor de verbinding met de eerste phalanx van den duim of met het dusgenoemde eerste metacarpus-beentje. Aan den buitenrand heeft het eene halfmaanswijs concave gewrichtsvlakte ter verbinding met het *os multangulum minus.* Dit laatstgenoemde been is klein, en draagt het *metacarpus*-beentje van den wijsvinger. Het komt naar boven niet met de eerste rij der handwortelbeentjes in verbinding. Het *os capitatum,* waarop het metacarpale been van den derden vinger geleed is, heeft ten dien einde aan zijn onderste gedeelte eene bijkans driehoekige geledingsvlakte, waarvan de punt naar binnen (naar de handpalm) gekeerd is; het been klimt van daar schuins naar de radiale zijde op, en verbindt zich boven en achter het *os multangulum minus* met den onderrand van het *os naviculare* §. Het vijfde been is het *os hamatum,* met het *os naviculare* het grootste der carpale beentjes. Van boven, waar het een rond hoofd aanbiedt, loopt het schuins naar beneden en naar buiten, waardoor mede de verbreeding van den carpus naar

---

* Cuvier hield dit *os accessorium* bij de Apen voor een deel van het *os multangulum minus, Leçons d'Anat. comp.* I, 302. Meckel heeft echter aangetoond, dat het veeleer als een afgescheiden stuk van het *os naviculare* moet worden beschouwd. *System der vergl. Anat.*, II. 2. S. 391, 392. Het komt ook voor bij den *Orang-oetan* en bij den *Gorilla;* zie Duvernoy, *Archives du Muséum,* VIII, 1855, maar ontbreekt bij den *Chimpanzé.* (W. Vrolik, *Recherches d'Anat. comp. sur le Chimpansé,* Amst. 1841. folio, p. 12.)

† Ook bij de kat wordt op dezelfde plaats een toegevoegd handwortelbeentje gevonden.

§ Op de rugvlakte der hand ziet men een gedeelte van het bovenste deel van dit been tusschen het *os naviculare* en de twee *ossa multangula.* Verg. voor de handwortel-beentjes fig. 4 en 5 en de verklaring der platen.

beneden veroorzaakt wordt. Aan de rugzijde van de hand vertoont het zich onder het *os accessorium ossis navicularis* als een scheef, langwerpig vierkant, maar de zijranden van het been loopen naar de handpalm scherp toe, zoodat het als eene wig gevormd is. De buitenste, vrij bolle vlakte van het hoofdje van dit been wordt in eene halfmaansgewijze gewrichtsholte van het *os triquetrum* opgenomen. De ondervlakte vertoont twee, zeer oppervlakkige gewrichtsholten voor de geleding met de metacarpale beentjes van den vierden en vijfden vinger.

Behalve deze handwortelbeentjes vindt men nog aan de handpalmvlakte een langwerpig, bijna driehoekig beenplaatje, dat in het *ligamentum transversum carpi proprium* gelegen, en waarvan de punt naar boven gekeerd en met het ondereinde van het *os naviculare* verbonden is.

De metacarpusbeenderen en de kootjes der vingers bieden, behalve in den wijsvinger, weinig aan, dat afzonderlijke vermelding verdient. Het *os metacarpi* van dezen vinger is kort, en heeft aan het ondereind een veel kleiner hoofdje dan de overige metacarpale beenderen. In den vinger zelven zijn slechts twee phalangen, waarvan de eerste de helft kleiner is dan die der volgende drie vingers, terwijl de tweede phalanx slechts een klein beenstukje is, waarvan de breedte de lengte overtreft. De grootere lengte van den vierden vinger boven den derden ontstaat door meerdere lengte van de *phalanges*, terwijl het metacarpale been niet langer is dan dat van den derden, en slechts zeer weinig langer dan dat van den vijfden vinger.

De duim heeft drie sesambeentjes; zij zijn geplaatst aan de handpalmvlakte; twee daarvan liggen aan het gewricht tusschen de eerste *phalanx* (het zoogenoemde *os metacarpi*) en de tweede (die gemeenlijk de eerste wordt genoemd). Het derde ligt aan de concave vlakte van de laatste *phalanx*.

§ 5. *Beenderen der achterste ledematen* *.

Gelijk bij de overige soorten van het geslacht *Stenops*, is het bekken zeer lang en smal. De darmbeenderen hebben bijkans de gedaante van een lang been der ledematen, van de ulna b.v., en loopen schuins van de heiligbeensverbinding naar beneden en buiten. Eene eigenlijke *fossa iliaca* is niet aanwezig. Zeer naar voren verlengd is de horizontale, breede tak van het schaam-

---

* Verg. fig. 7 en 8 en de daarbij behoorende verklaring.

been; de breede *symphysis ossium pubis* steekt sterk vooruit. Het *foramen obturatorium* is zeer groot, en heeft eenigzins de gedaante van eenen gelijkzijdigen driehoek, waarvan de hoeken zijn afgerond. Aan den bovenrand van den schaambeens-tak ziet men, digt boven den achterrand van dit gat, een *tuberculum ileo-pectineum,* terwijl de *spina anterior inferior ossis ilii* ontbreekt. Aan het zitbeen zijn de *spina* en het *tuber ischii* weinig ontwikkeld, en door geene *ligamenta spinoso-sacralia* en *tuberoso-sacralia* met de wervelkolom verbonden. De *symphysis sacro-iliaca* wordt echter zeer versterkt, bijzonder door de stevige *ligamenta ileo-sacralia posteriora.* Een *ligamentum ileo-lumbale* ontbreekt.

Het dijbeen is het langste been van het skelet even als bij den mensch, en dus langer dan het scheenbeen; het verschil is echter gering, en bedraagt naauwelijks 4 m.m. *. Het dijbeen is zeer regt, van achteren aan het bovenste en onderste uiteinde, vooral aan het eerste, zeer vlak. De hals van het hoofd des dijbeens is kort, en de *trochanter minor,* die sterk ontwikkeld is, gelijk ook W. Vrolik bij andere soorten van Stenops opgeteekend heeft, klimt bijna even hoog als dit hoofd op.

De beenderen van het onderbeen zijn volkomen van elkander gescheiden, en de tusschenruimte is zeer breed. De *fibula* is in verhouding tot de *tibia* dikker dan bij den mensch. De *tibia* is aan de binnenzijde plat en van voren afgerond, zoodat ook eene eigenlijke *crista tibiae* ontbreekt †. De beide *malleoli* aan het ondereinde dezer twee beenderen zijn zeer breed, en de binnenste reikt een weinig lager naar beneden dan de buitenste. Aan dien binnensten *malleolus* ziet men aan de achtervlakte eene diepe sleuf, waar langs de pees van den *musculus flexor digitorum communis* heenloopt.

Van het heup- en kniegewricht behoeven wij slechts te melden, dat zij in zamenstelling met die bij den mensch overeenstemmen. De knieschijf is

---

* Geoffroy Saint-Hilaire (de vader) zegt, dat bij *Loris, Nycticebus, Otolicnus* en *Tarsius* de *tibia* langer is dan het *os femoris* (*Ann. du Muséum,* XIX, p. 158, 162, 164, 165, 167), doch zulks is onjuist. Alleen bij *Tarsius* is het scheenbeen iets, hoezeer naauwelijks, langer dan het dijbeen, en ook bij *Otolicnus Peli* vond Dr. Kingma het 4 m m. langer. Bij andere soorten van *Otolicnus* en bij al de door mij onderzochte soorten van Lemur vond ik het dijbeen langer dan het scheenbeen in de verhouding van 6 : 5 of 7 : 6.

† Alleen van boven ziet men er eene aanduiding van, die vervolgens naar binnen in den scherpen rand van de binnenvlakte overgaat.

een langwerpig plat, van voren bol, beentje, hetgeen aan de vrije vlakte slechts eene facet vertoont. Behalve de *patella* vindt men aan het kniegewricht nog twee kleinere, ronde beentjes, beide aan de buitenzijde. Het eene ligt in den vezelachtigen beursband, boven het hoofd der fibula, geheel naar buiten en eenigzins aan de achtervlakte, achter het *ligamentum laterale externum* *; het andere is dwars boven de *tibia* aan de buitenvlakte van den *condylus internus* van het dijbeen geplaatst; het *ligamentum laterale externum* loopt er schuins over heen.

In den *tarsus* vindt men dezelfde beentjes als in die van den mensch, hoezeer hunne gedaante en onderlinge plaatsing in sommige opzigten vrij afwijkend is. Het hielbeen (*calcaneus*) vertoont naar boven en buiten het haakvormig naar achteren omgebogen *tuber calcanei.* Het ligchaam is smal, maar wordt naar onderen weder breeder ter vereeniging met het teerlingvormig been. Aan den binnenrand ziet men een breed *sustentaculum.* Door eene gewrichtsvlakte op het *sustentaculum* en eene kleinere op het ligchaam vereenigt zich het hielbeen met het *kootbeen* (*talus*). Dit laatstgenoemde been is sterk, en komt over 't geheel met dat bij den mensch overeen, maar het ligt minder op en meer naar binnen van het hielbeen dan bij den mensch. Het *cuboideum* heeft eene diepe groef (*sulcus*) aan de ondervlakte, die door scherpe kanten begrensd wordt. Naar voren geleedt dit been met de *ossa metacarpi* van den vierden en vijfden vinger. Het scheepsgewijze beentje (*os scaphoideum* s. *naviculare*) is groot, van eene onregelmatige gedaante, en vertoont eene diepe, dwarse groeve boven het eerste en tweede wigvormige been. Zijne langste afmeting strekt zich schuins van den rug van den voet naar de voetzool uit, en aan het naar onderen gekeerde gedeelte biedt het een uitsteeksel aan, dat naar de voetzool is omgebogen. Naar voren vereenigt het zich met de drie wigvormige beentjes (*ossa cuneiformia*), van welke, even als bij den mensch, het eerste het grootste en het tweede het kleinste is. Het eerste *os cuneiforme* heeft echter geene wigvormige gedaante, maar komt in zijnen vorm, die vrij onregelmatig is, tamelijk wel overeen met het *os multangulum majus* in de hand. Deze overeenkomst staat in verband met de gelijkvormigheid, die bij den Potto tusschen den duim

---

* De Heer VAN CAMPEN teekent hierbij op, dat dit beentje bij meer zoogdieren en ook als uitzondering bij den mensch voorkomt.

en den grooten toon aanwezig is. De twee overige *cuneiformia* hebben daarentegen de gewone wigvormige gedaante, en zijn met het smalle gedeelte naar de voetzool gerigt.

Het voetgewricht wordt, zoo als bij den mensch, tusschen het ondereinde der *tibia* en *fibula* en de geledingsvlakten aan het boveneinde van den *talus* gevormd, waarbij de gewrichtsvlakten volkomen den vorm aanbieden, die aan een scharniergewricht eigen is. Het *ligamentum capsulare* wordt versterkt door een breed *ligamentum laterale internum,* dat van den *malleolus internus* schuins naar achteren verloopt en zich aan den *talus* bevestigt. Het *ligamentum laterale externum* is in drie banden gesplitst: een *ligamentum fibulare calcanei,* dat naar buiten gelegen en langer is dan de twee andere banden; en een *ligamentum fibulare tali anticum* en *posticum,* digt bij elkander geplaatst en door den vorigen band bedekt. Bovendien heeft men aan de rugvlakte van het gewricht nog een bandje, dat van den binnen-enkel schuins over den hals van het kootbeen naar buiten loopt, en zich aan de binnenzijde van de onderste helft van het hielbeen bevestigt. Het *ligamentum interosseum,* tusschen den *talus* en *calcaneus* uitgespannen, is bijzonder stevig. Aan de vlakte der voetzool ontspringt het *ligamentum calcaneo-cuboideum,* niet van het *tuber,* maar van het voorste uiteinde van het hielbeen, en breidt zich ook gedeeltelijk over den *sulcus ossis cuboidei* naar de tarsale einden der drie laatste beenderen van den *metatarsus* uit. In dwarse rigting zijn in de voetzool het hiel- en scheepsgewijze been door stevige bandmassa verbonden, terwijl aan de oppervlakte nog een dwarse band gelegen is, die geheel overeenkomt met het *ligamentum carpi transversum* en daarom *ligamentum tarsi transversum* kan worden genoemd. Onder dien band gaan de pezen van den *musculus flexor digitorum longus.* Aan den buitenrand is hij aan het hielbeen en aan den binnenrand aan het scheepsgewijze been en het eerste wigvormige beentje bevestigd. Ook hier ligt een beenplaatje in dezen band.

De navoetsbeentjes en de phalangen der toonen hebben bijkans dezelfde gedaante als de beentjes van den metacarpus en van de vingers. Ook de drie leden van den grooten teen komen zeer met die van den duim overeen, terwijl de eerste phalanx ook zeer bewegelijk met het daar boven geplaatste eerste wigvormig been verbonden is. Deze eerste phalanx (gewoonlijk *os metatarsi hallucis* genoemd) onderscheidt zich echter door een sterk puntig uitsteeksel aan de voetzoolzijde van haar bovenste uiteinde; dit uitsteeksel

dient tot aanhechting van den *musculus peroneus longus*. Het derde lid van den tweeden toon heeft eene elsvormige, naar boven gekromde gedaante, en loopt puntig uit. De derde en vijfde teen zijn nagenoeg even lang en bijkans 4‴ langer dan de tweede, en de vierde is wederom de langste, 't geen vooral door de meerdere ontwikkeling van zijne eerste en tweede phalanx veroorzaakt wordt. De sesambeentjes zijn gelijk aan die van de hand.

BESCHRIJVING DER SPIEREN.

De spieren van den *Potto* vertoonen vele eigenaardige bijzonderheden.

§ 1. *Huidspieren.*

De huidspieren zijn in 't algemeen dezelfde als bij de overige vierhandige zoogdieren. Aan den romp heeft men aan de zijvlakten van het ligchaam eene doorloopende spierlaag, die ongeveer 4 centim. breed is. Deze spier, die wij, volgens E. BURDACH, *Musc. subcutaneus abdominis* s. *maximus* noemen *, ontspringt uit de diepte der okselholte met een smal peesje van het *tuberculum majus* van het opperarmbeen, verloopt vervolgens langs de zijde der borst en van den buik naar beneden, en wordt in dezen loop versterkt door bundels, die van de huid der rugvlakte van den schouder ontspringen. Onder aan den buik verbreedt zich deze spier, en plant zich met zijne binnenste, sterkere bundels in de huid van den *penis* en van het *scrotum* in, terwijl de overige bundels aan de binnenvlakte van het voorste gedeelte der dij tot aan de knie in de huid overgaan.

De *m. subcutaneus colli* ontspringt van de huid van den schouder en nek, en bedekt als eene dunne spierlaag de zijvlakte van den hals, om zich vervolgens over het aangezigt uit te breiden. De meeste bundels eindigen in de huid van den mondhoek en van de onderlip. In het aangezigt komt vervolgens nog eene huidspier voor (*m. subcutaneus faciei*), die met de vo-

---

* *Neunter Bericht von der königlichen anatomischen Anstalt zu Königsberg. Mit einem Beitrag zur vergleichenden Anatomie der Affen von* E. BURDACH. Königsberg 1838. 8°. S. 7.

rige naauw zamenhangt, en als haar vervolg zou kunnen beschouwd worden. Zij hecht zich aan de huid van de bovenlip en aan den *m. orbicularis oris*, en verspreidt zich van hier uit over het aangezigt; eenige bundels gaan naar boven in den *musculus sphincter palpebrarum* over, terwijl de meeste in eene schuinsche rigting over den jukboog naar de slaapstreek verloopt, en met den *musc. attollens auriculae* versmelt *.

§ 2. *Spieren van den kop.*

Het schedeldak is bedekt door eene dunne spierlaag, welke uit den *musc. occipito-frontalis* en den *m. attollens* is zamengesteld. De oorsprong van de eerstgenoemde spier is dezelfde als bij den mensch, maar hare beide deelen gaan onmiddellijk in elkander over; eene *galea aponeurotica* is derhalve niet aanwezig.

De aangezigtsspieren zijn weinig ontwikkeld en onderling zeer vergroeid. Men kan echter de volgende onderscheiden. De *m. sphincter palpebrarum* is eene breede, dunne spier, die de oogleden bedekt, en dus met den *m. ciliaris Albini* van den mensch overeenkomt. De *m. levator labii superioris alaeque nasi* is een stevig spiertje, dat van den binnenooghoek langs de zijden van den neus naar beneden loopt, en gedeeltelijk op den neus, gedeeltelijk in de bovenlip overgaat. Aan zijnen oorsprong op den neus is deze spier met de gelijknamige der andere zijde en met den oorsprong van den *musculus frontalis* innig vergroeid. Er is geen *musc. levator labii superioris proprius* aanwezig, maar, na wegname van de vorige spier en van de huidspier van het gelaat, komt een eigenaardig spiertje te voorschijn, dat den naam verdient van *musculus dilatator narium;* deze spier ontspringt uit de groef op het bovenkaaksbeen achter de onderoogkasopening, loopt naar voren, en verspreidt zich in de huid van den neusvleugel. Onder deze spier, en aan zijn' oorsprong er door bedekt, ligt de opligter van den mondhoek (*musc. levator anguli oris*), een kort spiertje, dat voor het *foramen infraorbitale* van den *processus alveolaris* van het bovenkaaksbeen ontspringt, en schuins naar beneden in den mondhoek overgaat. Er zijn geene *m. m. zygomatici* aanwezig. De *musc. buccinator* is zeer dun, maar onderscheidt zich overigens

---

* Verg. fig. 9.

niet van dien bij den mensch; boven den mondhoek wordt deze spier door den *ductus Stenonianus* doorboord. De *m. sphincter oris* is niet als zelfstandige spier te onderscheiden, maar wordt hoofdzakelijk door de zamenkomst der voorgaande spieren vervangen. Behalve den *musculus subcutaneus colli* heeft men ook geene spieren voor de beweging der onderlip.

De spieren van het uitwendig oor zijn de *musculus attollens, m. attrahens* en twee *m. m. retrahentes auriculae.* De *musculus attollens auriculae* is eene breede spierlaag, die ter zijde op het schedeldak ligt, en met den *musculus occipito-frontalis* zamenhangt; hij hecht zich aan den grond van de oorschelp. De *m. attrahens auriculae* ontspringt van den wortel van den jukboog; het is een kort, stevig spiertje, dat zich van voren aan het oor vasthecht. De *m. m. retrahentes auriculae* zijn twee lange, dunne spiertjes, die van de *linea semicircularis* van het achterhoofd ontspringen, en in de achtervlakte der oorschelp overgaan.

De kaauwspieren zijn zeer ontwikkeld. De *m. temporalis* en *m. masseter* zijn niet volkomen gescheiden, maar gaan naar binnen van den jukboog onmerkbaar in elkander over. De *m. temporalis* ontspringt namelijk niet alleen van de slaapgroeve, maar ook van de binnenvlakte van den jukboog, waarna alle bundels zich aan den *processus coronoideus* aanhechten. De *m. masseter* ontspringt van de buitenvlakte en den onderrand van den jukboog, en plant zich aan de buitenvlakte van den geheelen *ramus maxillae* in; aan deze spier zijn geene twee afzonderlijke lagen te onderscheiden; de vezels verloopen nagenoeg door de geheele spier zeer schuins van voren naar achteren. De *m. pterygoideus internus* onderscheidt zich door niets van deze spier, zoo als zij bij den mensch voorkomt. De *m. pterygoideus externus* heeft twee hoofdjes, waarvan het eene uit de diepte der slaapgroeve en het andere van de buitenvlakte van den *processus pterygoideus* ontspringt; de vezels van beide loopen van voren naar achteren, en hechten zich vereenigd vast aan den hals van het gewrichtshoofd der onderkaak en aan den beursband van het kaakgewricht.

§ 3. *Spieren van den hals.*

Onder de huidspier van den hals komt de *musc. sterno-cleido-mastoideus* het eerst te voorschijn. Deze spier is stevig en breed, en neemt de geheele zijvlakte van den hals en nek in; met haren buitenrand grenst zij onmiddel-

lijk aan den voorrand van den *m. cucullaris*. De spier is niet, zoo als bij vele Quadrumanen *, in een *m. sternomastoideus* en *m. cleidomastoideus* gescheiden, maar vormt slechts eenen enkelen spierbuik. Ontspringend van den bovenrand van het borst- en van de grootste helft van het sleutelbeen, hecht zich deze spier aan de geheele *linea semicircularis* van het achterhoofdsbeen.

De *musc. omohyoideus*, onder den vorigen gelegen, verschilt alleen daarin van dien bij den mensch, dat hij geene tusschenpees aanbiedt, waardoor hij in twee buiken gescheiden wordt †.

De *m. sterno-hyoideus*, naar binnen van den *m. omohyoideus* gelegen, ontspringt zeer laag van de achtervlakte van het *manubrium sterni*, en is aldaar vergroeid met den *m. sterno-thyreoideus*. Eerst in haar verder verloop hooger aan den hals, scheiden zich deze spieren, terwijl zich de *m. sterno-hyoideus* aan den grond van het tongbeen, de *m. sterno-thyreoideus* aan het schildvormig kraakbeen vasthecht. De *m. hyothyreoideus* is zeer kort, doordien het tongbeen bijna onmiddellijk met den bovenrand van het schildvormig kraakbeen verbonden is.

Boven het tongbeen zijn de spieren in de volgende orde gelegen. In de eerste plaats vindt men hier den *musculus biventer maxillae inferioris*. De achterste buik van deze spier is kort en dik, en ontspringt met eene breede oppervlakte van de *bulla tympani*. De voorste buik ontspringt aan den rand der onderkaak van de kin tot aan den voorrand van den *m. masseter*; aan den *angulus maxillae* is deze buik door middel eener dunne pees met den achtersten verbonden, terwijl eenige vezels zich afzonderlijk aan het tongbeen vasthechten. Aan het voorste gedeelte blijft er tusschen de twee spieren van beide zijden eene ruimte over, waarin de *m. mylo-hyoideus* zigtbaar is §. Deze spier (*mylo-hyoideus*) vult, even als bij den mensch, de geheele ruimte

---

* MECKEL, *System d. vergl. Anat.*, III. S. 427. Bij vele Apen ontbreekt het sleutelbeens-gedeelte dezer spier. Het is echter ook bij *Stenops tardigradus* en *javanicus* aanwezig. VROLIK, *Recherches* etc., *Verhandel. van de Eerste Klasse van het Koninkl. Ned. Inst.* l. l. bl. 107. Bij *Otolicnus Peli* vond KINGMA deze twee spieren geheel gescheiden l. l. p. 21; even zoo BURMEISTER bij *Tarsius*, l. l. S. 37.

† Deze spier ontbreekt bij vele groote zoogdieren, maar komt bij de Apen, eenige *Carnivora* en *Marsupialia* voor. W. VROLIK, *Recherches*, *Nieuwe Verhandel. van de Eerste Klasse van het Kon. Ned. Inst.* Dl. X p. 107.

§ De *m. biventer* is eveneens uit twee buiken zamengesteld bij *Stenops tardigradus* en *javanicus*, W. VROLIK, *Recherches* etc., *Verhandel. van de Eerste Klasse van het Kon. Ned. Inst.* l. l. p. 107.

onder de onderkaak; de achterste bundels bevestigen zich ook aan het tongbeen, terwijl de overige zich in het midden met die van de andere zijde in eene *raphe* vereenigen. De *m.m. geniohyoidei* van beide zijden zijn met elkaâr, vergroeid en vormen te zamen eene breede spier. De *m. genioglossus* komt volkomen overeen met dien van den mensch, even als de *m. hyoglossus*, die na het wegnemen van den *m. mylo-hyoideus* en *biventer* te voorschijn komt. De *musculus styloglossus* en *m. stylopharyngeus* liggen meer ter zijde, bedekt door den achtersten buik van den *m. biventer;* het zijn kleine spiertjes, die van de *bulla tympani* en den, daaraan bevestigden, kleinen hoorn van het tongbeen ontspringen. De *m. styloglossus*, die boven den *m. stylopharyngeus* ligt, is langer, en gaat aan den achterrand van den *m. hyoglossus* in de tong over; de *m. stylopharyngeus* verspreidt zich onder het tongbeen in de wanden van den pharynx.

Een *m. stylohyoideus*, die bij de Apen aanwezig is *, ontbreekt bij den *Potto.*

Wat de dieper gelegen halsspieren betreft, de *m.m. recti capitis antici minor* en *major* zijn op de gewone wijze aanwezig. De *m. rectus capitis lateralis* is naar buiten van den *m. rectus anticus minor* gelegen; even als deze ontspringt hij van het dwarse uitsteeksel van den eersten halswervel, en hecht zich aan den grond des schedels in eene groef tusschen de *bulla tympani* en de achterhoofdsknokkels. Aan den *m. longus colli* kan men, zoo als bij den mensch, drie gedeelten onderscheiden: het onderste gedeelte strekt zich van de ligchamen der vier bovenste borstwervels naar de dwarse uitsteeksels der drie onderste halswervels uit; het bovenste ontspringt van de dwarse uitsteeksels der middelste halswervels, en hecht zich aan den knobbel voor op den ring van den eersten halswervel; het binnenste gedeelte eindelijk ontspringt van de ligchamen der drie onderste halswervels en hecht zich aan het ligchaam van den tweeden en derden halswervel.

Er zijn slechts twee driehoekige halsspieren (*m.m. scaleni*) aanwezig, doordien de *m. scalenus anticus*, die bij den mensch voor de ondersleutelbeensslagader en de armzenuwvlecht gelegen is, ontbreekt, 't geen ook bij vele andere zoogdieren het geval is †. De voorste *m. scalenus*, die aan den *medius*

---

* BURDACH l. l. p. 16, VROLIK, *Rech. sur le Chimpansé*, p. 27; ook bij *Tarsius*, BURMEISTER l. l. p. 35.

† Bij de Apen zijn er gewoonlijk drie *m. m. scaleni*, bij *Lemur* en *Stenops* slechts twee. MECKEL, *Syst. der vergl. Anat.* III. S. 418. Bij *Tarsius* echter vond BURMEISTER drie *m. m. scaleni*. l. l. S. 37.

des menschen beantwoordt, is onmiddellijk achter de genoemde slagader en zenuwvlecht gelegen, en slechts eene kleine spier, die van den bovenrand der eerste rib naar de dwarse uitsteeksels der vier onderste halswervels loopt. De *m. scalenus posticus* is daarentegen krachtig ontwikkeld, en ontspringt zeer laag van de derde, vierde, vijfde en zesde rib met afzonderlijke bundels tusschen den *m. serratus anticus major;* vervolgens stijgt de spier achter den *m. scalenus medius* langs den hals omhoog, en hecht zich aan de dwarse uitsteeksels der drie bovenste halswervels *.

§ 4. *Borstspieren.* †

De groote borstspier (*m. pectoralis major*) bestaat slechts uit één gedeelte (*portio sterno-costalis*) §, hetwelk langs den rand van het smalle borstbeen, van de kraakbeenderen der negen bovenste ribben en met eenige weinige bundels van de verbinding tusschen borstbeen en sleutelbeen ontspringt. De spier plant zich aan de *spina tuberculi majoris* van het opperarmbeen in. De spieren van beide zijden komen met elkander in de mediane lijn te zamen, waar zij door eene peesachtige *raphe* vereenigd zijn.

De *m. pectoralis minor* is eene breede spier, die zich verder naar beneden uitstrekt dan de vorige. Deze spier ontspringt langs den rand van het borstbeen van de derde tot de tiende rib, en bovendien ook van de scheede van de regte buikspier. Hare vezels loopen schuins naar boven en naar buiten, en hechten zich door eene breede pees aan het *tuberculum majus* van het opperarmbeen, en niet aan het ravenbeks-uitsteeksel van het schouderblad, gelijk bij den Mensch, den Chimpansé en den Orang-oetan.

Onder de kleine borstspier liggen aan de voorzijde der borstholte twee kleine spieren, die beide van de eerste rib haren oorsprong nemen. De bovenste kleinere loopt schuins naar beneden, en gaat in eene dwarse peesachtige uitbreiding over, die zich aan de lager gelegen ribben tot aan de zesde uitstrekt. De daaronder gelegen spier is lang en smal; zij loopt regt naar beneden en gaat

* Zie Pl. II, fig. 14. — Voor de spieren van den nek verwijzen wij naar het vervolg, waar zij met de rugspieren gelijktijdig beschreven worden; zie onder § 7.

† Zie Pl. II, fig. 10.

§ W. Vrolik vermeldt bij de overige soorten van *Stenops* een zwak, van het sleutelbeen ontspringend bundeltje, *Nieuwe Verhandelingen*, l. l. p. 108, *Bijdragen tot de Dierkunde*, l. l. p. 44. Ook bij *Tarsius* vond Burmeister eene kleine uitwendige *portio clavicularis*, l. l. p. 50.

geheel in de regte buikspier over; zij vormt derhalve het begin van deze buikspier.

De *m. serratus anticus major* ontspringt aan de zijvlakte der borst van de elf bovenste ribben, met twaalf tanden, waarvan de twee bovenste van de eerste rib ontstaan. De voorste en middelste bundels dezer spier loopen naar achteren, en hechten zich aan den binnenrand van het schouderblad; de onderste tanden stijgen naar boven, en hechten zich met eenen omgeslagen rand aan den ondersten hoek van het schouderblad vast.

De *m. subclavius* is eene kleine, langwerpige, dunne spier, die zich van het voorste einde der eerste rib naar het midden van het sleutelbeen uitstrekt.

De *m.m. intercostales* verschillen niet van die bij den mensch; eene aponeurotische uitbreiding over de kraakbeenige gedeelten der ribben (*ligamentum coruscans*) ontbreekt, hoewel de uitwendige tusschenribbige spieren zich naar voren ook niet verder dan tot de kraakbeenderen der ribben uitstrekten.

§ 5. *Buikspieren.*

De *musculus rectus abdominis* ontspringt, zoo als wij bij de borstspieren vermeld hebben, reeds van de eerste rib *. De spier ontvangt ook nog bundels, die van de kraakbeenderen der onderste ware ribben en van het zwaardvormig verlengsel des borstbeens ontspringen, en loopt, in hare scheede ingesloten, naar beneden, waar zij aan den bovenrand der schaambeensvereeniging met eene smalle pees vastgehecht is. Zoogenoemde *inscriptiones tendineae* ontbreken, gelijk ook bij vele andere zoogdieren †. De *m. pyramidalis* ontbreekt.

De *buitenste schuinsche buikspier* (*m. obliquus externus*) ontspringt van de acht of negen onderste ribben, met tanden, waarvan de vier bovenste ingrijpen in de onderste tanden van den *m. serratus anticus major*. Naar achteren hangt deze spier zamen met de *fascia lumbo-dorsalis*, en naar voren gaat zij door eene pezige uitbreiding in de *linea alba* over. Deze peesachtige plaat strekt zich naar onderen niet tot de liesgroeve uit, maar ein-

---

* Dit hoog opklimmen van de regte buikspier, die de geheele lengte van borst- en buikholte inneemt, komt niet slechts bij *Carnivora* maar bij vele andere zoogdieren, bij andere Lemuriden en bij verscheidene Apen voor. MECKEL, *System der vergl. Anat.* III. S. 450.

† Bij *Lemur mongos* vond echter MECKEL deze peesachtige dwarsstrepen en wel zeer talrijk, namelijk 9, l. l. p. 451. Bij *Tarsius* zag BURMEISTER er geene, l. l. S. 45.

digt, wegens den hoogen stand der *crista ossis ilii* reeds eerder in den band van *Poupart;* beneden dien band komt het ondereinde der binnenste schuinsche spier vrij te voorschijn. Ten gevolge hiervan komen de *m. ileo-psoas* en de dijvaten tusschen den onderrand der binnenste schuinsche spier en de schaambeenskam te voorschijn *.

De uitwendige opening van het lieskanaal is zeer ruim; het *crus internum,* dat deze opening naar boven begrenst, gaat niet in het *ligamentum suspensorium penis* over, maar hecht zich op de schaambeensvereeniging vast; het *crus externum* hecht zich breed aan de kam van het schaambeen.

De *musc. obliquus abdominis internus* is dunner dan de vorige; hij neemt zijnen oorsprong van de *fascia lumbo-dorsalis,* en gaat naar achteren in de scheede van den *m. rectus* over, terwijl eenige bundels zich aan de drie onderste ribben inplanten. Het onderste gedeelte der spier, dat, gelijk wij vermeld hebben, onder het *ligamentum Poupartii* te voorschijn komt, ontspringt van de *fascia lata,* die den *m. glutaeus medius* bekleedt, en het onmiddellijk vervolg is der *fascia lumbo-dorsalis.*

De *musc. transversus abdominis* vormt eene zeer dunne spierlaag, waarvan de vezels geheel dwars verloopen. Hij ontspringt van de *fascia lumbo-dorsalis,* de onderste ribben en de kam van het darmbeen, en gaat naar voren weder in den achterwand der scheede van de regte buikspier over. Zoowel de *m. transversus* als de *m. obliquus internus* geven naar onderen eenige bundels af, die als *m. cremaster* langs den *funiculus spermaticus* naar den bal loopen.

Het middenrif (*diaphragma*) heeft een klein peesachtig deel (*centrum tendineum*) †, waarin regts het *foramen quadrilaterum* voor de opstijgende holle ader gelegen is. In het lendendeel (*pars lumbalis*) ligt, even als bij den mensch, de spleet, waardoor de groote slagader heengaat, terwijl het daarboven gelegen gat voor den slokdarm door het binnenste en middelste *crus* van de regterzijde begrensd wordt.

§ 6. *Spieren van het perineum.*

De *musculus sphincter ani externus* ontspringt van de voorvlakte van den

---

* BURDACH (*Myol. der Affen,* S. 32) maakt ook bij de Apen op deze verhouding opmerkzaam, die het natuurlijk gevolg is van den lang gerekten vorm van het darmbeen.

† Ook KUHL en v. HASSELT vermelden zulks bij *Stenops gracilis,* t. a. p. S. 37.

tweeden staartwervel, omgeeft den *anus,* en gaat naar voren niet in den *m. bulbo-cavernosus* over, zoo als bij den mensch, maar loopt oppervlakkig over deze spier heen om in de huid van het *scrotum* te eindigen.

Het onderste gedeelte van het *rectum* wordt aan weèrszijde bedekt door eene breede spier, die in oorsprong en ligging geheel met den *m. levator ani* van den mensch overeenkomt. Deze spier gaat echter niet in den *m. sphincter ani* over, maar hare vezels loopen schuins naar achteren en beneden, en hechten zich aan de drie eerste staartwervels; zij zal derhalve, als zij slechts aan eene zijde werkt, den staart zijdelings bewegen; werken die van beiden zijden gelijktijdig, dan zullen zij den staart buigen. Naar haren oorsprong en hare aanhechting zou men deze spier den naam kunnen geven van *musculus pelvi-coccygeus.* Tusschen deze spier en den zijwand van het bekken blijft eene opening over (*cavum ischio-rectale*), waardoor de *nervus pudendus communis* naar voren loopt. (Zie Pl. III, fig. 17.)

Als *m.m. levatores ani* dienen twee achter den regten darm gelegen kleine spiertjes, die van het midden van het heiligbeen aan zijne voorvlakte ontspringen, en naar beneden in den *m. sphincter ani externus* eindigen. Als antagonist dezer spieren is een *m. depressor ani* aanwezig, die, aan de voorvlakte van den vijfden staartwervel ontspringend, naar boven loopt, en zich tusschen de vorige spieren aan de achtervlakte van den *anus* inplant.

De spieren der geslachtsorganen: *m. bulbo-cavernosus* en *m. ischio-cavernosus,* zijn zwak, maar onderscheiden zich overigens niet van die van den mensch. Dwarse spieren des bilnaads (*m.m. transversi perinei*) zijn niet aanwezig.

§ 7. *Rug- en nekspieren.*

De *m. cucullaris* grenst met zijnen buitenrand aan den achterrand van den *m. sterno-cleidomastoideus,* en vormt met dezen de eerste spierlaag van den nek. De spier ontspringt van de twee eerste halswervels, van het *ligamentum nuchae* en verder van de doornuitwassen der vijf onderste hals- en tien bovenste rugwervels. De aanhechting aan het schouderblad geschiedt op dezelfde wijze als bij den mensch; alleen moet worden vermeld, dat eenige bundels aan den voorrand van deze spier zich niet aan het sleutelbeen hechten.

De *m. latissimus dorsi* ontspringt alleen van de doornuitwassen der lendenwervels en der tien onderste rugwervels, naardien de van de ribben afko-

mende tanden ontbreken; zijne platte pees hecht zich aan het opperarmbeen in eene sleuf tusschen de *spina tuberculi majoris et minoris.*

De *m. teres major* vereenigt zich niet met de pees van de vorige spier, maar heeft eene afzonderlijke aanhechting aan de *spina tuberculi minoris.*

Onder deze eerste laag van rugspieren zijn gelegen de *m. splenius capitis,* spieren van het schouderblad en de lange rugspieren. De *m. splenius capitis* is eene sterke nekspier, die van de doornuitwassen der halswervels ontspringt, en zich aan de geheele *linea semicircularis* van het achterhoofd vasthecht. Van den onderrand dezer spier scheidt zich een bundel af, die zich aan het dwarse uitsteeksel van den *atlas* inplant, en derhalve als *musculus splenius colli* kan beschouwd worden.

De *m. rhomboideus major* en *minor* is slechts ééne enkele spier, die in schuinsche rigting van de doornuitwassen der vijf onderste halswervels naar den binnenrand van het schouderblad loopt.

De *m. levator anguli scapulae* vertoont geene bijzonderheden. Hij neemt zijnen oorsprong van de dwarse uitsteeksels der vijf bovenste halswervels, en plant zich aan den boven-binnenhoek van het schouderblad in.

Andere spieren, die het schouderblad opheffen, komen bij den *Potto* niet voor, hoewel zij bij andere vierhandige zoogdieren als *m. levator posticus* en *m. levator anticus* vermeld worden. Evenzoo ontbreekt een *m. depressor scapulae,* dien Burmeister bij den *Tarsius* beschrijft *. De *m. serratus posticus superior* ontbreekt, terwijl de *serratus posticus inferior* op de gewone wijze aanwezig is.

Van de lange rugspieren is vooral de *m. extensor dorsi communis* sterk ontwikkeld. Deze spier heeft denzelfden oorsprong als bij den mensch, en verdeelt zich ook aan de laatste rib in den *m. sacro-lumbalis* en *m. longissimus dorsi.* De eerste spier aan de buitenzijde der laatstgenoemde gelegen is zwak; zij hecht zich aan het achterste gedeelte der ribben vast. Als vervolg dezer spier aan den nek gaan er van de tweede en vier volgende ribben bundels naar de dwarse uitsteeksels der twee onderste halswervels, en vormen alzoo den *musculus cervicalis adscendens.* De *m. longissimus dorsi* is veel dikker,

---

* l. l. p. 46. Ook Kingma vermeldt zoodanig eene spier bij *Otolicnus Peli; Vergelijkend-Ontleedkundige Aanteekeningen,* bl. 22.

en wordt nog versterkt door bundels van de dwarse uitsteeksels der zes onderste rugwervels. Naar boven klimmende hecht zich deze spier aan de dwarse uitsteeksels der rugwervels en aan de achtereinden der ribben, en gaat in den nek onmerkbaar over in den *musculus transversalis cervicis*. Deze spier ontspringt van de dwarse uitsteeksels der bovenste rugwervels, en hecht zich aan dezelfde uitsteeksels van de vijf bovenste halswervels. Aan de buitenzijde dezer spier ligt echter nog een afzonderlijke *m. transversalis cervicis*, als een klein spiertje, dat van de dwarse uitsteeksels van de onderste halswervels naar de bovenste is uitgespannen.

Onder den *m. splenius capitis* vindt men verder aan den nek nog eene vrij breede spiermassa, die zich aan het binnenste gedeelte van de *linea semicircularis* van het achterhoofd vasthecht. Deze bestaat eigenlijk uit twee spieren, die zich vóór hare inhechting vereenigd hebben; de eene ontspringt van de dwarse uitsteeksels der twee bovenste rugwervels, en is op het midden geheel peesachtig (*m. biventer cervicis*); de andere, die meer naar binnen ligt, is zeer met peesvezels doorweven, en neemt zijnen oorsprong van de dwarse uitsteeksels der middelste halswervels (*m. complexus major*).

Nadat deze rug- en nekspieren zijn weggenomen, ziet men den *m. multifidus spinae*, die niet van dien bij den mensch afwijkt, en in den nek in den *m. semispinalis cervicis* overgaat; deze bestaat uit spierbundels, die van de dwarse uitwassen der bovenste rugwervels naar de doornuitwassen der bovenste halswervels verloopen. Naar binnen van deze spier zijn nog eenige bundels, die zich over de onderste naar de bovenste halswervels uitstrekken (*m. spinalis cervicis*).

Een afzonderlijke *m. spinalis* en *semispinalis dorsi* komt niet voor. Van de overige korte rugspieren valt weinig te vermelden.

Van de *m.m. levatores costarum* zijn alleen de korte aanwezig.

De *m.m. interspinales* zijn nergens duidelijk ontwikkeld. De *m.m. intertransversarii* zijn aan den hals dubbel; aan de rug- en lendenwervels zijn zij niet te onderscheiden.

De spiertjes, die aan den nek tusschen het achterhoofdsbeen en de twee bovenste halswervels gelegen zijn (*m.m. recti capitis posteriores, major et minor, m. obliquus capitis superior* et *m. obl. cap. inferior*), komen in oorsprong en aanhechting volkomen overeen met die van den mensch, en zijn krachtig ontwikkeld.

§ 8. *Spieren van den staart.*

De spieren van den staart zijn weinig ontwikkeld, hetgeen met de kortheid van dit deel overeenkomstig is. Bij naauwkeurig onderzoek kan men echter nog drie paar afzonderlijke spiertjes onderkennen, die den staart rondom bekleeden.

De *m.m. levatores caudae* zijn twee kleine spieren, die van de rugvlakte van het heiligbeen ontspringen, en aldaar zamenhangen met den oorsprong van den *m. extensor dorsi communis.* In hun verloop naar achteren gaan de spierbundels spoedig in dunne peesjes over, die zich aan de achtervlakte van de staartwervels inplanten.

Van onderen wordt de staart bedekt door de *m.m. flexores caudae*; deze ontspringen in het bekken aan de voorvlakte van het heiligbeen, achter den oorsprong van den *musculus pyriformis.* De spierbundels worden naar achteren spoedig peesachtig, en hechten zich aan de voorvlakte der staartwervels vast.

Het derde paar spieren bedekt den staart ter zijde; zij worden gevormd door eenige bundels, die van de buitenzijde van het heiligbeen ontspringen, en aan de zijvlakte der staartwervels eindigen.

Behalve door deze eigene spieren, kan de staart nog in zijn geheel bewogen worden door den *m. pelvi-coccygeus* en *m. ischio-coccygeus.* Den eersten hebben wij bij het perineum als buiger van den staart beschreven (bl. 30). De *m. ischio-coccygeus* komt overeen met den *m. coccygeus* bij den mensch, maar is veel breeder; hij ontspringt van de *spina* en den bovenrand van het *os ischii,* loopt dwars naar binnen, en hecht zich aan den buitenrand der twee eerste staartwervels. Deze spier zal derhalve den geheelen staart ter zijde kunnen bewegen.

§ 9. *Spieren der voorste ledematen* *.

De schouderspieren behoeven wij niet te beschrijven, daar zij met de menschelijke geheel overeenkomen.

Aan den bovenarm vindt men aan de binnenvlakte, vooreerst den *m. coraco-brachialis.* Even als bij *Tarsius* en *Otolicnus* † is deze spier in twee afzonder-

---

* Vergel. Pl. II, fig. 10, 11, 12, en 13.

† Burmeister, l. l. S. 49; Kingma, l. l. bl. 24.

lijke deelen onderscheiden, zoodat men een' *musc. coraco-brachialis longus* en een *m. coraco-brachialis brevis* kan aannemen. De eerste hecht zich aan de binnenvlakte van het opperarmbeen van het midden tot aan den binnensten *condylus* vast; deze spier is derhalve langer, en bevestigt zich lager dan bij den mensch *. De *musc. coraco-brachialis brevis* is een kort, stevig spiertje, dat geheel door den peesachtigen oorsprong der voorgaande spier bedekt wordt, en zich onder het hoofd van het opperarmbeen, achter de inplanting van den *m. teres major*, vasthecht.

De *m. biceps brachii* heeft werkelijk twee hoofden †. Het lange hoofd ontspringt op de gewone plaats, en gaat in eenen stevigen spierbuik over, die zich door middel eener ronde pees aan de *tuberositas radii* inplant. Het korte hoofd, dat op het midden van het armbeen in dezen spierbuik overgaat, vormt slechts een' kleinen bundel, die niet van het ravenbeks-uitwas maar van de pees van den *m. coraco-brachialis* zijnen oorsprong neemt.

De *m. brachialis internus* ligt onder de tweehoofdige armspier, tusschen de aanhechting van den *m. coraco-brachialis* en den oorsprong van den *m. supinator longus*; deze spier komt in oorsprong en aanhechting met die bij den mensch overeen.

De *m. biceps brachii* aan de achterzijde van den bovenarm heeft geheel de gewone zamenstelling; alleen moeten wij opmerken, dat de peesachtige uitbreiding, waarin het uitwendige hoofd overgaat, ofschoon aan haren binnenrand met de pees van het lange hoofd verbonden, toch meer afzonderlijk aan het *olecranon* en den buitensten *condylus* van het opperarmbeen is ingehecht.

De *m. anconaeus quartus* ontbreekt.

De *m. anconaeus quintus*, die in de okselholte van de pees van den *m. latissimus dorsi* ontspringt, en bij vele zoogdieren (en bepaald bij alle vierhandige) gevonden wordt, is bij den *Potto*, even als bij den *Tarsius* § eene

---

* Hetzelfde vond W. VROLIK bij de andere soorten van *Stenops*.

† MECKEL schrijft bij *Stenops* aan den *m. biceps* slechts het lange hoofd toe. *System der vergl. Anat.*, III. S. 523. Bij den kukang (*Stenops javanicus*) vond echter W. VROLIK twee hoofden van deze spier, en zoo ook beschrijven BURMEISTER den *m. biceps* bij *Tarsius*, l. l. p. 56, en KINGMA bij *Otolicnus Peli*, l. l. p. 24.

§ BURMEISTER, l.l. S. 50, 54; ook bij *Otolicnus Peli*, KINGMA l.l. p. 25, 26.

Dat er bij den mensch eene, vroeger door BERGMANN opgemerkte doch als anomalie beschouwde,

afzonderlijke spier, die geheel van de driehoofdige armspier gescheiden is. Deze spier strekt zich langs de binnenvlakte van den bovenarm naar beneden uit, en hecht zich naar binnen van de inplanting der driehoofdige spier aan het *olecranon* vast.

Aan den voorarm vertoont de eerste laag van spieren aan de buigvlakte geene noemenswaardige afwijking van hetgeen wij bij den mensch opmerken. Ook de plaatsing dezer spieren (*m. pronator teres, m. flexor carpi radialis* en *ulnaris, m. palmaris longus*) is geheel dezelfde als bij den mensch.

De *m. flexor digitorum sublimis* (*perforatus*) is eene zeer zwakke spier, die aan den voorarm tusschen de beide hoofden van den *m. flexor digitorum profundus* gelegen is. Deze spier ontspringt van den inwendigen *condylus* van het opperarmbeen en het bovenste gedeelte der ellepijp, en splitst zich boven den handwortel in drie dunne peesjes, die naar de drie laatste vingers verloopen. Hierbij verdeelt zich elk peesje, onmiddellijk onder het *ligamentum carpi transversum*, in twee zeer fijne *crura* *, die zich, na vorming van het *chiasma Camperi*, ter zijde van de tweede phalanx der genoemde vingers inplanten.

De *m. flexor digitorum profundus* is daarentegen krachtig ontwikkeld, en bestaat uit twee afzonderlijke gedeelten, welker pezen zich met elkander vereenigen. Het eene gedeelte ontspringt van den inwendigen *condylus* van het opperarmbeen en de voorvlakte van het spaakbeen, het andere van de bovenhelft der ellepijp en van het *ligamentum interosseum*. Deze deelen gaan elk in eene sterke pees over, en deze pezen splitsen zich weder in tweeën, boven het *ligamentum carpi transversum*. Verder vereenigt zich nu eene der pezen van beide spieren, en hecht zich als *flexor pollicis longus* † aan het

---

verbinding van de pees van de breede rugspier met den *musculus triceps* standvastig voorkomt, werd door Prof. H. J. HALBERTSMA in 1855 ontdekt; zie *Verslagen en Mededeelingen der Kon. Akad. van Wetenschappen. Afdeeling Natuurkunde*, Deel IV. 1856. p. 238—246. Deze vereeniging vertoont zich onder twee vormen, waarvan de tweede vooral als een analogon van dezen *m. anconaeus quintus* beschouwd kan worden; zie bl. 242 en fig. 2 der bijgevoegde plaat.

* De hooge splitsing van de pees van den oppervlakkigen buiger der vingers, die KINGMA bij *Otolicnus Peli* waarnam (t. a. p. bl. 27), is dus geenszins eene toevallige afwijking, een *lusus naturae*, gelijk hij geneigd scheen aan te nemen.

† Dit ontstaan van den *flexor pollicis longus* uit de pees van den *musculus flexor digitorum profundus* zag W. VROLIK ook bij andere soorten van *Stenops*. *Nieuwe Verhandel. van het Kon. Ned. Inst.*, X. bl 109.

nagellid van den duim vast, terwijl de twee overige pezen der gemelde spierdeelen zich, na hare vereeniging onder het *ligamentum carpi transversum*, in drie pezen verdeelen. Deze drie pezen loopen door de spleet der pezen van den *m. flexor digitorum sublimis*, en hechten zich aan het laatste lid der drie laatste vingers. Eene afzonderlijke lange buigspier van den duim is dus niet aanwezig, en bovendien is het zeer opmerkelijk, dat noch de *flexor digitorum sublimis* noch de *profundus* zich aan den korten wijsvinger bevestigen.

In de hand ontspringen van de pezen van den *musculus flexor digitorum profundus* de *m.m. lumbricales* als lange, dunne spiertjes, die zich aan den radialen rand der drie laatste vingers naar de aponeurosis op den rug der hand omslaan.

De *m. pronator quadratus* is volkomen gelijk aan dien bij den mensch.

Aan de rugvlakte van den voorarm vindt men het eerst aan de radiale zijde den *m. supinator longus*, die zeer hoog aan het *os humeri* ontspringt, onmiddellijk onder de inplanting van den *m. deltoideus* en den oorsprong van den *m. extensor carpi radialis longus*. Overigens komt deze spier met de gelijknamige bij den mensch overeen. De *m. extensor carpi radialis longus* ontspringt van het onderste derde gedeelte van het opperarmbeen; de *m. extensor carpi radialis brevis* onmiddellijk daaronder van den *condylus internus*. Beide spieren worden langs den buitenrand van den voorarm door den *m. supinator longus* bedekt. De sterke pezen, waarin deze spieren overgaan, loopen onder het *ligamentum carpi dorsale* naar de hand, waar de pees der lange spier zich aan den grond van het nahands-beentje van den wijsvinger, en die der korte aan dezelfde plaats van het nahands-beentje van den middelvinger inplant.

Op het midden nagenoeg van de rugvlakte des voorarms, ligt de *musculus extensor digitorum communis*. Deze spier is zwak; zij ontspringt van den *condylus externus ossis humeri*, en ligt in haar verloop eerst tusschen den *m. extensor carpi radialis brevis* en den *m. extensor carpi ulnaris*, later tusschen den *musc. abducens pollicis longus* en *extensor carpi ulnaris*. Boven den handwortel gaat deze spier in vier peesjes over, die, na onder het *ligamentum carpi dorsale* te zijn doorgegaan, zich in het peesachtig vlies van den derden, vierden en vijfden vinger verspreiden; de beide middelste pezen zijn aan den vierden vinger bevestigd; naar elk der twee overige vingers gaat slechts eene enkele pees; op de rugvlakte der hand zijn deze pezen niet door aponeurosen met elkander verbonden.

De *m. extensor carpi ulnaris* is bijzonder stevig, en ligt tusschen de ellepijp en de vorige spier. Deze spier ontspringt van den buitensten knokkel van het opperarmbeen en den buitenrand der ellepijp, en hecht zich door eene stevige ronde pees aan het basale uiteinde van het metacarpale been van den vijfden vinger.

Genoemde spieren verloopen in de rigting van de lange as van den voorarm. Onder deze laag liggen spieren, die deze as kruisen: de *m. supinator brevis, m. abducens pollicis longus, m. extensor pollicis longus* en *m. indicator;* de *m. extensor pollicis brevis* ontbreekt *. De *m. supinator brevis* vertoont niets bijzonders.

Wat de spieren van den duim betreft, de lange aftrekkende spier van den duim is vrij stevig, en ontspringt breed van het spaakbeen en het *ligamentum interosseum.* Tusschen den *m. supinator longus* en *m. extensor digitorum longus* te voorschijn gekomen, slaat zij zich om het spaakbeen heen, overkruist daarbij de twee *m.m. extensores carpi radiales,* en hecht zich aan het basale uiteinde van het eerste lid van den duim vast.

De *m. extensor pollicis longus,* tusschen de vorige en den *m. indicator* gelegen, ontspringt van het bovenste gedeelte van de ellepijp en van den tusschenbeensband; de pees gaat even als de overige onder het *ligamentum carpi dorsale,* overkruist op den handwortel de pezen van de *m.m. extensores carpi radiales* even als die der vorige spier, en hecht zich aan het nagellid van den duim.

De *m. indicator* is eene kleine spier, die van de ellepijp en den tusschenbeensband ontspringt. Het peesje dezer spier verloopt onder het *ligamentum carpi dorsale* langs de pezen van den *m. extensor digitorum communis,* en gaat verder in de peesachtige uitbreiding op den rug van den kleinen wijsvinger over.

De spiertjes van den *thenar* en *antithenar* zijn dezelfde als bij den mensch, met uitzondering van den *m. opponens,* die aan beide ontbreekt. Bovendien verkrijgt de wijsvinger, waaraan de lange buigers zich niet bevestigen, in de hand eenen *m. flexor brevis.*

Aan den duim onderscheidt men derhalve den *m. adductor, flexor* en *ad-*

---

* Volgens W. Vrolik ontbreekt deze ook bij andere soorten van *Stenops,* en is met den *abducens longus pollicis* versmolten. *Nieuwe Verhandel. van het Kon. Ned. Inst.,* X. bl. 109.

ductor brevis. De *m. adductor pollicis brevis* is een zwak spiertje, dat van het *ligamentum carpi transversum* ontspringt, en zich aan den grond van het tweede lid van den duim inplant. De *m. flexor pollicis brevis* ligt aan de binnenzijde der vorige spier, en heeft, even als bij den mensch, twee hoofdjes, die de pees van den langen buiger van den duim tusschen zich door laten. Deze hoofdjes ontspringen op de gewone wijze, en hechten zich, na hunne vereeniging aan het achterst uiteinde, en met eenen doorloopenden spierbundel ook aan het voorste einde der tweede *phalanx* vast. De *m. adductor pollicis brevis* is eene dikke, breede spier, die in de diepte der handpalm van het metacarpus-been van den tweeden en derden vinger ontspringt. Zijne vezels loopen dwars naar buiten, en hechten zich in de breedte aan den geheelen binnenrand van het tweede lid van den duim.

De *m. flexor indicis brevis* is eene spiermassa, die in de handpalm van de binnenvlakte van het peesvlies (*fascia palmaris*) ontspringt, en zich aan de eerste en rudimentaire tweede *phalanx* van den wijsvinger bevestigt.

Aan den vijfden vinger heeft men een' *m. adductor* en *m. flexor digiti quinti.* De *m. adductor* is een smal spiertje, dat van het *os pisiforme* ontspringt, en zich aan de basis van het eerste vingerlid vasthecht. De *m. flexor* ligt aan de binnenzijde van de vorige spier, ontspringt van het *ligamentum carpi transversum* en den haak van het *os hamatum,* en plant zich aan den geheelen binnenrand der eerste *phalanx.*

De *tusschenbeens-spieren* (*m.m. interossei*) zijn door haar aantal en hare plaatsing zeer onderscheiden. De *m.m. interossei externi* (*bicipites*) zijn vier in getal. De eerste en tweede, van den duim af gerekend, hechten zich aan de radiale zijde van den tweeden en derden vinger; de beide overige hechten zich aan weêrszijde van den vierden vinger vast. Er zijn acht *m.m. interossei interni;* zij bevestigen zich aan beide zijden van het eerste lid der vier laatste vingers, zoodat elke vinger er twee verkrijgt.

§ 10. *Spieren der achterste ledematen* *.

Aan de achtervlakte der heup bestaat de eerste spierlaag alleen uit den *musculus glutaeus magnus,* die bij den *Potto* eene groote uitgestrektheid heeft, en den *m. glutaeus medius* geheel bedekt. De spier is echter zeer dun. Zij

---

* Vergel. Pl. III, fig. 14, 15, 16 en 18.

neemt haren oorsprong van den geheelen boven- en binnenrand van het darmbeen en van de zijvlakte van het heiligbeen. De bovenste bundels, die naar beneden loopen, hechten zich aan den *trochanter major* vast; de middelste en onderste bundels loopen daarentegen in de rigting van binnen naar buiten, en hechten zich aan de achtervlakte der bovenhelft van het dijbeen.

De *m. glutaeus medius* is eene zeer krachtige spier, die nagenoeg van de geheele buitenvlakte van het darmbeen en van den rand van het heiligbeen ontspringt, en zich met eene korte, breede pees aan den top van den *trochanter major* inplant.

De *m. glutaeus tertius* is, in vergelijking der beide vorige, zeer klein. Deze spier neemt haren oorsprong van de achtervlakte van het darmbeen, onmiddellijk boven het heupgewricht. Hare vezels loopen naar buiten, en hechten zich aan de *fossa trochanterica.*

Naar binnen van den *m. glutaeus tertius* is de *m. ischio-coccygeus* gelegen, eene spier, die wij vroeger reeds bij den staart beschreven hebben. Daar de *ligamenta spinoso-sacralia* en *tuberoso-sacralia* ontbreken, wordt het *foramen ischiaticum majus* door dit korte maar breede spiertje gesloten. Langs den bovenrand dezer spier komen de *nervus ischiaticus* en *nervus pudendus communis* uit het bekken te voorschijn.

De *m. pyriformis* ontspringt in het bekken op de gewone plaats. Na haren doorgang door het *foramen ischiaticum majus,* versmelt de spier geheel met de ondervlakte van den *m. glutaeus medius,* en heeft geene afzonderlijke aanhechting aan de *fossa trochanterica.* Dien ten gevolge grenst de *m. glutaeus tertius* aan zijnen achterrand onmiddellijk aan de pees van den *m. obturatorius internus.* De laatstgenoemde spier ontspringt zeer breed aan de binnenvlakte van het bekken, van den geheelen zijwand, met een voorste en achterste gedeelte, die door eene spleet gescheiden zijn, waardoor de *arteria obturatoria* en de *nervus obturatorius* naar buiten treden. Deze twee gedeelten komen in ééne pees te zamen, die langs den achterrand van den *musculus coccygeus* tusschen de *spina* en het *tuber ossis ischii* het bekken verlaat, om zich aan de trochanter-groeve in te planten.

De *m. m. gemelli* ontbreken. De *m. quadratus femoris* en *m. obturatorius externus* zijn volkomen gelijk aan die van den mensch.

De spieren aan de binnenvlakte der heup zijn: *m. psoas major, m. psoas minor, m. iliacus internus* en *m. quadratus lumborum.*

De *m. psoas major* is zamengesteld uit twee gedeelten, die echter niet, zoo als bij *Tarsius* *, in hun geheel verloop gescheiden zijn, maar ongeveer op de hoogte van het *ligamentum Poupartii* zich met elkaâr vereenigen. Het binnenste, grootere, gedeelte ontspringt van de ligchamen van alle lendenwervels, terwijl het buitenste, kleinere, van de zijvlakte van de ligchamen van den derden, vierden, vijfden en zesden lendenwervel voortkomt.

De *m. iliacus internus* wordt geheel door de beide hoofden der vorige spier bedekt, en heeft, in overeenstemming met den vorm van het darmbeen, eene lange, smalle gedaante. Onder den band van POUPART vereenigt zich deze spier met den *m. psoas major* tot den *musculus ileo-psoas*, en deze hecht zich door eene stevige pees aan den kleinen draaijer van het dijbeen.

De *m. psoas minor* loopt langs de voorvlakte van den *psoas major* met welken hij gemeenschappelijk van de ligchamen van den eersten en tweeden lendenwervel zijnen oorsprong neemt; spoedig gaat hij in eene lange, platte pees over, die zich boven het heupgewricht aan den rand van het bekken inplant.

De *m. quadratus lumborum* is weinig ontwikkeld, en ligt geheel achter den *m. psoas major* verborgen. Deze spier ontspringt van den kam van het darmbeen, en hecht zich aan de *processus costarii* der lendenwervels, en, met eenige weinige vezels, aan de laatste rib vast.

De spier, die aan de voorbinnenvlakte van de dij het eerst te voorschijn komt, is de *m. sartorius*. De gedaante en het verloop dezer spier verschillen niet van hetgeen wij in het menschelijk ligchaam opmerken; zij ontspringt echter lager, van den voorrand van het darmbeen, en reikt niet tot aan den kam van dat been; van onderen hecht zij zich onmiddellijk beneden het kniegewricht aan de binnenvlakte van het scheenbeen vast.

Onder den *m. sartorius* hecht zich aan dezelfde binnenvlakte van het scheenbeen eene spier vast, die uit de vereeniging van drie andere spieren ontstaan is, of, zoo men wil, met drie afzonderlijke hoofden ontspringt. Men kan deze spier als de vereeniging van den *m. gracilis* en *m. semitendinosus* † beschouwen, van welke de eerste twee hoofden heeft. De *m. gracilis* vormt vooreerst

---

* BURMEISTER, l. l. p. 67.

† „*Le demi-tendineux se réunit au droit interne (m. gracilis)*". W. VROLIK. *Nieuwe Verh. van de Eerste Klasse van het Kon. Nederl. Inst.*, X. p. 109.

het eerste hoofd, dat, tusschen den *musculus adductor longus* en *m. adductor brevis*, van den nederdalenden tak van het schaambeen ontspringt, en langs de binnenvlakte der dij naar beneden loopt. Het tweede hoofd, dat geheel aan de achtervlakte der dij ligt, ontspringt spierachtig van den zitbeensknobbel, en vormt in zijnen loop den bovenbinnenrand van den kniekuil. Deze spier komt dus overeen met den *musculus semitendinosus*, hoezeer zij geheel spierachtig is. Het derde hoofd eindelijk ontstaat met eenen breeden oorsprong, die den *m. pectineus* bedekt, van den kam van het schaambeen, en loopt, de *m. m. adductores* kruisende, schuins naar beneden. Dit hoofd of deze spier, die bij den mensch niet voorkomt, en ook bij andere vierhandige zoogdieren ontbreekt, werd door Meckel ook in andere soorten van *Stenops* waargenomen, en als het tweede hoofd van den *m. gracilis* beschreven *. In het eene voorwerp van *Potto* vereenigden zich de beide hoofden van den *m. gracilis* reeds op het midden der dij, terwijl eerst aan de knie de *m. semitendinosus* in deze vereenigde spier overging. Bij het andere voorwerp, dat wij onderzochten, waren de drie beschreven gedeelten *drie geheel, tot aan de knie van elkaar gescheiden spieren.*

Aan de binnenvlakte der dij en door de beide hoofden van den *m. gracilis* bedekt, liggen de aanvoerende spieren (*adductores*) van de dij. Dit stelsel van spieren is, even als bij de andere *Lemuriden*, zwak ontwikkeld, en onderscheidt zich daardoor inzonderheid van de inrigting bij den Mensch en bij de Apen, dat de spieren niet tot de knie naar beneden reiken, maar zich alle aan de bovenste helft van het dijbeen inplanten.

De *m. pectineus* vertoont niets buitengewoons.

De *m. adductor brevis*, aan de binnenzijde van den *m. pectineus* gelegen, ontspringt ter zijde der schaambeensvereeniging, en hecht zich onder den kleinen draaijer van het dijbeen vast. De *m. adductor longus* ontspringt iets lager van den nederdalenden tak van het schaambeen, en hecht zich, onder de vorige spier, op het midden van het dijbeen aan de binnenvlakte vast. De *m. adductor magnus* ligt achter beide voorgaande spieren, en overtreft haar in sterkte. Deze spier ontspringt van den knobbel en den opklimmen-

---

* „Unter den Quadrumanen ist er [der *innere gerade* oder *schlanke Schenkelmuskel*] bei *Stenops* dreiköpfig." *System der vergl. Anat.*, III. S. 613. Een dezer hoofden erkent hij echter als *m. semitendinosus*; bij *Lemur* en *Ateles* vereenigt zich deze spier ook met den *m. gracilis*, welke laatste hier echter buitendien slechts éénhoofdig is.

den tak van het zitbeen, en hecht zich aan de bovenhelft van het dijbeen vast.

Bij een der twee onderzochte voorwerpen kwam nog een vierde *m. adductor* voor. Deze aanvoerende spier was kort maar zeer breed en stevig, en werd grootendeels door den *m. pectineus* bedekt; zij ontsprong van den *ramus horizontalis* van het schaambeen, ter zijde van de *symphysis*, en plantte zich onder den kleinen draaijer aan het dijbeen in *.

De *vierhoofdige strekspier der dij* (*musc. extensor cruris quadriceps*) komt met de gelijknamige spier bij den mensch overeen. De *m. rectus femoris* ontspringt onder den *m. sartorius* van den voorrand van het *os ilii*. Verder zijn de hoofden volkomen gescheiden; de *m. vastus externus* is de sterkste, en ontspringt van den grooten draaijer en van de geheele buitenvlakte van het dijbeen; boven de knie vereenigen zich deze spieren in de gemeenschappelijke uitstrekkende pees.

De buigers van het onderbeen, aan de achtervlakte der dij gelegen, zijn de *m. biceps femoris*, *m. semitendinosus* (reeds vroeger beschreven), *m. semimembranosus* en *m. popliteus*. De *m. biceps femoris* verdient bij den *Potto* dezen naam eigenlijk niet, daar hij slechts één hoofd heeft, zoo als bij vele vierhandige zoogdieren, en alleen van den zitbeensknobbel ontspringt †. Deze oorsprong is geheel peesachtig, en gaat eerst op het midden van de dij in eene spier over, die verder de bovenbuitenzijde van de *fossa poplitea* vormt. De aanhechting dezer spier is zeer breed aan het *capitulum* en de bovenhelft der *fibula*.

De *m. semimembranosus* is de sterkste buiger van het onderbeen; hij ontspringt afzonderlijk van den zitbeensknobbel en den opklimmenden tak van het

---

* De *m. tensor fasciae latae* werd bij beide voorwerpen te vergeefs gezocht. Ook Meckel heeft deze spier, die bij de meeste zoogdieren voorkomt, bij het geslacht *Lemur* (*Lemur mongos* en *Lemur albifrons*) niet gevonden. *Syst. der vergl. Anat.*, III. S. 622. Ook bij *Tarsius* ontbreekt deze spier geheel, tenzij een kleiner, aan den darmbeenskam ontspringend deel van den *m. glutaeus magnus* haar vervangt. Burmeister, l. l. p. 68.

† Bij andere soorten van *Stenops* heeft hetzelfde plaats. Schroeder van der Kolk en W. Vrolik, *Dierkundige Bijdragen* t. a. p., p. 46; ook bij *Otolicnus Peli*, Kingma, t. a. p. bl. 30. Bij vele Apen is deze spier mede éénhoofdig. Meckel, *Syst. der vergl. Anat*, III. S. 611, E. Burdach, *Beitrag zur vergl. Anat. der Affen*, S. 45. Bij den *Chimpansé* vond W. Vrolik deze spier tweehoofdig; hetzelfde is ook bij den *Orang* het geval en bij eenige andere Apen, ook die verder van den mensch afwijken, zoo als de Amerikaansche geslachten *Ateles* en *Stentor*, Meckel. l. l.

schaambeen, en hecht zich met eene stevige pees aan den inwendigen knokkel van het scheenbeen.

De *m. popliteus* komt nagenoeg met dien van den mensch overeen; hij neemt zijn' oorsprong van het beentje, dat boven het *capitulum fibulae* in den achterwand van het gewrichtsvlies gelegen is, loopt vervolgens schuins naar beneden, en plant zich aan de bovenachtervlakte van het dijbeen in.

Het onderbeen is aan alle zijden door spieren bedekt. De voorzijde wordt aan de oppervlakte ingenomen door den *m. tibialis anticus* en den *m. peroneus longus;* door deze bedekt, zijn in eene diepere laag geplaatst de *m. extensor digitorum longus, m. extensor hallucis longus* en *m. peroneus brevis.*

De *m. tibialis anticus* ontspringt van de twee bovenste derde deelen van het scheenbeen, van den tusschenbeensband en de *fascia cruris;* boven den voet gaat hij in eene stevige pees over, die onder het *ligamentum annulare anterius* naar den binnenrand van den voet loopt, en zich aan het *os cuneiforme primum* inplant.

De *m. peroneus longus* ligt naar buiten van de vorige spier. Hij neemt zijn begin hoofdzakelijk van den buitenknokkel van het scheenbeen en van de *fascia cruris;* slechts eenige weinige vezels ontspringen van het *capitulum fibulae;* zijne pees loopt langs den buiten-enkel naar den buitenrand van den voet, en begeeft zich vervolgens door den diepen *sulcus ossis cuboidei* naar den binnenrand der voetzool, alwaar hij zich aan het vroeger beschreven uitsteeksel der eerste phalanx van den grooten teen (bladz. 21) aanhecht.

De *m. peroneus brevis,* door den *longus* bedekt, komt in alle opzigten met de gelijknamige spier bij den mensch overeen.

De pezen der *m. m. peronei* worden ook achter den buiten-enkel terug gehouden door een zoogenoemd *retinaculum,* hetgeen naar voren onmerkbaar in het *ligamentum annulare anterius* overgaat.

De *m. extensor digitorum longus* is eene zwakke spier, die eerst laag aan het onderbeen tusschen den *m. tibialis anticus* en den *m. peroneus longus* te voorschijn komt. In haren oorsprong komt deze spier met die van den mensch overeen, en ook hare pees loopt onder het *ligamentum annulare anterius* en daarna door de lus van het *ligamentum fundiforme tarsi* naar den rug van den voet; dáár gekomen, splitst zich deze pees in drie peesbundeltjes, die door eene dunne aponeurotische verbinding onderling zamenhangen, en op de rugvlakte van den derden, vierden en vijfden teen eindigen.

De *m. extensor hallucis longus,* naar binnen der laatstvermelde spier ge-

legen, is ook weinig ontwikkeld. Deze spier ontspringt echter reeds hoog, namelijk van den uitwendigen knokkel van het scheenbeen en van den tusschenbeens-band, om zich met een dun peesje aan den grooten teen in te planten.

Op de bovenvlakte van den voet vindt men nog twee korte uitstrekkers. De *m. extensor digitorum brevis* is eene dunne spierlaag, die van den voetwortel en de grondstukken der navoetsbeentjes ontspringt, en met afzonderlijke bundels aan het eerste lid der teenen eindigt, zonder met de pezen van den langen *extensor digitorum* te versmelten. De *m. extensor hallucis brevis* is een spiertje, dat van het voorste einde van het hielbeen ontspringt, alwaar zijne pees zich met die van den *extensor hallucis longus* vereenigt.

Aan de achterste oppervlakte van het onderbeen is de eerste spierlaag, die der zoogenoemde kuitspieren, weinig ontwikkeld en zeer dun. De *m. gastrocnemius* ontspringt op de gewone wijze van de knokkels van het dijbeen; zijne hoofden blijven lang gescheiden. De *m. soleus* vormt slechts eenen kleinen spierbundel, die van het *capitulum fibulae* zijnen oorsprong neemt, en op het midden van het onderbeen met den *m. gastrocnemius* zamensmelt; de pees van ACHILLES hecht zich aan het omgebogen *tuber calcanei* vast. De *m. plantaris* ontbreekt *.

De tweede laag wordt door twee spieren gevormd: de achterste scheenbeens-spier en de lange buigspier der teenen. De *m. tibialis posticus* is slechts eene zwakke spier, die tusschen de beide hoofden van de lange buigspier der teenen gelegen is. Deze spier ontspringt van de achtervlakte van het kuitbeen en van den tusschenbeensband, en gaat in eene dunne pees over, die in zijnen loop langs den binnen-enkel door het binnenste hoofd der lange buigspier der teenen overkruist wordt. Aan den binnenrand van den voet bevestigt zich deze spier aan het *os naviculare*. — De *m. flexor digitorum longus* vertoont vele bijzonderheden. Even als de *m. flexor digitorum profundus* aan den voorarm †, bestaat ook deze spier uit twee afzonderlijke deelen, welker pezen zich eerst in de voetzool vereenigen. Deze beide ge-

---

* Ook bij de andere soorten van *Stenops* (SCHROEDER VAN DER KOLK en W. VROLIK, *Rech. d'Anat. Comp.* in *Bijdragen tot de Dierk.*, p. 46) en bij *Otolicnus Peli* (KINGMA, l.l. p. 31). Deze spier is daarentegen bij *Tarsius* aanwezig; BURMEISTER, l. l. S. 67. Ook bij den mensch is deze spier somtijds niet aanwezig.

† Zie boven, bl. 35.

deelten kan men naar hunne ligging als het uit- en inwendige hoofd van den *musculus flexor digitorum* onderscheiden. Het inwendige hoofd ontspringt van de bovenhelft van het scheenbeen, en gaat in eene sterke pees over, die in eene groeve achter den binnen-enkel naar de voetzool loopt. Het uitwendige hoofd ligt aan de achtervlakte tusschen den *m. peroneus brevis* en den *tibialis posticus,* met welke spieren het van de *fibula* en den tusschenbeensband gezamentlijk ontspringt; zijne pees gaat langs de binnenvlakte van het *tuber calcanei,* onder het vroeger beschrevene *ligamentum tarsi transversum* (zie boven bl. 21), naar de voetzool, en splist zich hier in tweeën; eene van deze pezen ontvangt alsdan een peesstrookje van het inwendige hoofd, en loopt verder voort naar het nagellid van den grooten teen, als *m. flexor hallucis longus,* welke als afzonderlijke spier, even als aan den duim der hand, bij den *Potto* ontbreekt. De twee overige pezen van beide hoofden vereenigen zich tot eene gemeenschappelijke pees, welke zich vervolgens splitst in vier pezen voor de vier buitenteenen; deze pezen loopen verder, even als die van de meer gemelde buigspier der vingeren, in scheeden ingesloten, langs de kootjes, en planten zich aan het nagellid in. De eerste dezer vier pezen, die zich aan den tweeden teen bevestigt, is veel zwakker dan de drie overige, en ook alleen van deze drie ontspringen *m. m. lumbricales,* welke zich naar de rug-aponeurose van den derden, vierden en vijfden teen ombuigen.

De *m. flexor digitorum brevis* ontspringt met spiervezelen van de pees van het inwendige hoofd der lange buigspier der teenen, ter hoogte van den binnen-enkel. Deze korte buigspier gaat onder het meer vermelde *lig. tarsi transversum* in de voetzool slechts in drie peesjes over, n. l. voor den derden, vierden en vijfden teen. Aan de eerste *phalanx* verdeelt zich verder elk dezer peesjes in twee fijne *crura,* die zich ter zijde der tweede phalanx bevestigen. De *m. flexor digitorum brevis* is derhalve, even als bij den mensch, een *musculus perforatus,* en door de in tweeën gesplitste pezen gaan die der lange buigspier, welke een *musculus perforans* is.

Aan de zoolvlakte van den voet vindt men verder nog de bijzondere spiertjes van den grooten en kleinen teen en het stelsel der *m. m. interossei.*

De spiertjes van den grooten teen, die hier gelegen zijn, komen met die van den mensch overeen. Men onderscheidt derhalve een *m. abductor,* een *m. flexor brevis,* en *m. adductor brevis.*

De *m. abductor hallucis* is een kort spiertje, dat langs den binnenrand van den voet, zeer naar voren gelegen is; het ontspringt van het eerste *os cunei-*

forme en van de *fascia plantaris*, en bevestigt zich aan het voorste einde van het eerste lid van den duim.

De *m. flexor hallucis brevis* is slechts éénhoofdig, en ontspringt in de diepte der voetzool van het uitsteeksel aan den grond van de eerste *phalanx* (of van het metatarsale been) van den grooten teen, en eindigt aan het voorste eind van het daarop volgende en aan den grond van het laatste lid.

De *m. adductor hallucis brevis* wordt gevormd door eene vrij stevige spiermassa, die dwars naar den grooten teen loopt. Hij neemt zijnen oorsprong van de *ossa metatarsi* van den tweeden en derden teen, en bevestigt zich aan de twee laatste leden van den grooten teen.

De spiertoestel, die tot den vijfden teen behoort, verschilt daarentegen zeer van dien van den mensch. Vooreerst vindt men langs den buitenrand van den voet een eigenaardig spiertje, hetgeen van den hielbeensknobbel ontspringt, en zich aan het uitsteeksel van den grond van het *os metatarsi* van den vijfden teen vasthecht. Dit spiertje zal derhalve den kleinen teen niet afzonderlijk kunnen bewegen, maar, wanneer wij bedenken, dat de beweging van den voet in een horizontaal vlak niet in het voetgewricht, maar tusschen de tarsus-beenderen geschiedt, zoo zal het blijken, dat deze spier den voet naar buiten kan wenden, en dus den naam kan dragen van *abductor pedis brevis*, terwijl men de *m. m. peronei* als *abductores longi* zou kunnen beschouwen. De vijfde teen ontvangt bovendien nog twee *m. m. abductores*, die men, volgens hunne ligging, als *m. abductor externus* en *internus* zou kunnen onderscheiden. De *m. abductor digiti quinti externus* ligt aan de buitenzijde van den voet in de verlenging der laatst beschreven spier. Hij ontspringt namelijk van de *tuberositas ossis metatarsi digiti quinti*, en eindigt aan den grond der eerste *phalanx*. De *m. abductor digiti quinti internus* is naar binnen der beide voorgaande spieren gelegen; deze spier begint aan den hielbeensknobbel en aan het peesvlies der voetzool (*fascia plantaris*), en gaat in een lang stevig peesje over, dat zich op dezelfde plaats als de pees der vorige spier aanhecht.

De *m. flexor digiti minimi brevis* neemt zijnen oorsprong van de *fascia plantaris* en het beenplaatje in het *ligamentum tarsi transversum* (zie boven bl. 21); zijne aanhechting is eveneens aan den grond van het eerste vingerlid.

Na het verwijderen dezer spiertjes, komt in de diepte der voetzool nog een *m. adductor digiti quinti* te voorschijn. Deze spier ontspringt van het derde

en vierde metatarsus-been, en hecht zich aan de binnenzijde van den grond der eerste *phalanx.*

De *m. m. interossei* worden weder verdeeld in *externi* en *interni.* De *m. m. interossei externi* komen geheel overeen met de gelijknamige spieren der hand. De *m. m. interossei interni* zijn vijf in getal en bevestigen zich aan den tweeden, derden en vierden teen; daarbij verkrijgen de derde en vierde teen elk twee dezer spieren, die zich aan weêrszijde der eerste *phalanx* bevestigen, terwijl de eerste *m. interosseus* zich inplant aan den buitenrand van den tweeden teen.

SPIJSVERTERINGS-WERKTUIGEN.

De mondholte is niet ruim, en zoogenoemde mondzakken, die bij vele vierhandige zoogdieren gevonden worden, zijn hier, evenmin als bij de overige *Lemuriden,* aanwezig. Het slijmvlies, dat de wanden van den mond bekleedt, bezit vele slijmklieren, en is aan het harde verhemelte voorzien met dwarse plooijen. Naar voren aan het gehemelte vindt men de openingen van de Stenonsche kanalen. Aan het zachte gehemelte mist men de *uvula* *; slechts is de vrije rand in het midden eenigzins verdikt. De *arcus palato-glossi* en *palato-pharyngei* staan ver van elkander verwijderd, en tusschen beide deze bogen liggen de sterk ontwikkelde *amygdalae,* welke eene tepelvormige gedaante hebben. De spieren van het zachte gehemelte zijn zeer dun; maar binnen van den *m. pterygoideus internus* is echter te onderscheiden een *m. tensor palati mollis,* waarvan het peesje zich om den *hamulus pterygoideus* heenslaat, alvorens in het zachte verhemelte over te gaan, en een *m. levator palati mollis,* die van de Eustachiaansche buis zijn' oorsprong neemt.

De tong is vooral in de lengte ontwikkeld; de breedte en dikte zijn in verhouding gering (de lengte bedraagt 45 m. m., de breedte op het midden omstreeks 10 m. m.). Het slijmvlies op de bovenvlakte is van voren op de gewone wijze met de *papillae filiformes* en *fungiformes* bezet. Op het ach-

---

* Volgens MECKEL, *System der vergl. Anat.*, IV. S. 714, ontbreekt de *uvula* bij alle Lemuriden.

terste gedeelte ziet men drie *papillae vallatae*; deze zijn groot en in een' driehoek met de punt naar achteren geplaatst. De spieren der tong zijn vroeger beschreven (bl. 26); een afzonderlijke *m. lingualis* kon niet worden onderscheiden *.

Onder de tong ligt eene vliezige of liever peesachtige plaat, die naar achteren aan de tong vastgehecht, en aan den vrijen voorrand regelmatig is ingekorven. Dit deel, hetgeen aan al de Lemuriden eigen schijnt te zijn †, biedt hier nog een tweede daaronder liggend korter, eveneens vliezig plaatje aan, waarvan bij andere soorten geene melding wordt gemaakt; het is dunner dan het voorgaande en naar voren in twee zijdelingsche slippen verdeeld §. Aan den voorsten vrijen rand van dit deel ligt de gemeenschappelijke uitmonding der onderkaaks- en ondertongs-speekselklieren, en het is dus niet twijfelachtig of men moet dit deel voor eene bijzondere ontwikkeling der *caruncula linguae* houden.

Het tongbeen heeft een zeer breed ligchaam, en gaat ter zijde in twee horens over. De onderste, kleinere, zijn onmiddellijk geleed op de bovenste hoornen van het schildvormig kraakbeen (*cartilago thyreoidea*); de bovenste hoornen (overeenkomende met de *cornua minora* bij den mensch) zijn zeer lang, en bestaan uit vier geledingen, die allengs dunner worden; het uiteinde van het vierde lid is door een kort bandje aan de ondervlakte des schedels, op de *bulla tympani* bevestigd.

De speekselklieren komen zeer overeen met die bij den mensch. De *glandula parotis* ligt tusschen den opklimmenden tak der onderkaak en den voorrand der aanhechting van den *musculus sterno-cleidomastoideus*. Naar voren bedekt de klier nog voor een klein gedeelte den *m. masseter*, maar strekt

---

* BURMEISTER teekent hetzelfde op bij *Tarsius*, l. l. p. 35. Drie *papillae vallatae* komen ook hier op de tong voor; BURMEISTER teekent ze echter in eene regte dwarse lijn naast elkander af. Tab. VI. fig. 1. Bij *Otolicnus Peli* liggen ze in een' driehoek even als bij *Stenops Potto;* zie KINGMA, t. a. p. fig. 4.

† In de *Bijdrage tot de kennis van den Potto* (*Verh. der Eerste Kl. v. het Kon. Ned. Inst.*, 3e. *Reeks* 4e. *Deel*) werd dit deel als eene bijzondere ontwikkeling van het *franulum linguae* beschouwd.

§ Mijne aandacht werd vroeger op dit deel niet bepaald gevestigd, maar dat ik het eveneens waarnam bij den vroeger door mij onderzochten *Potto*, bleek mij uit eene afteekening, welke gediend heeft tot Fig. 8, Pl. I mijner aanhaalde Bijdrage. Op de plaat is die figuur te flaauw afgedrukt, maar zal men echter dit deel onder de tong aangeduid zien.

zich niet beneden op den hals uit. De uitvoerende buis (*ductus Stenonianus*) komt van voren, nabij den onderrand, te voorschijn, loopt vervolgens eenigzins schuins over den *m. masseter,* en opent zich boven den mondhoek in de mondholte. De *glandula submaxillaris* is nagenoeg even groot als de *parotis* en in verschillende kwabben verdeeld. Deze klier ligt aan de binnenzijde der onderkaak onder den voorsten buik van den *m. biventer* en den *m. mylohyoideus,* en hare uitlozingsbuis wendt zich om den achterrand van laatstgenoemde spier naar boven. De *glandula sublingualis* is veel kleiner dan de twee vorige klieren; zij ligt boven den *m. mylohyoideus,* ter zijde van den *m. geniohyoideus.* Hare uitlozingsbuis vereenigt zich met die der *glandula submaxillaris,* en deze gemeenschappelijke buis opent zich, zoo als wij kort te voren reeds vermeld hebben, aan den vrijen rand van de tweede vliezige plaat onder de tong in de mondholte *.

Betrekkelijk den *pharynx* en *oesophagus* zijn geene bijzonderheden te vermelden; ook aan de *m.m. constrictores pharyngis* konden wij geen verschil met die van den mensch opmerken. De slokdarm neemt zijnen loop op de gewone wijze langs den hals en door de borstholte, om, na doorboring van het middenrif in zijn lendengedeelte, in de maag over te gaan.

De ligging der ingewanden in de buikholte, voor zoover wij deze aan onze in spiritus bewaarde voorwerpen konden nagaan, is ongeveer de volgende. Het regter *hypochondrium* wordt ingenomen door de, in vele lobben verdeelde lever, welke door een *ligamentum suspensorium* en door *ligamenta coronaria* met het middenrif verbonden is. In de *regio epigastrica* en het *linker-hypochondrium* ligt de maag, voor een groot gedeelte door de lever bedekt, die zich ver naar de linkerzijde uitstrekt. Langs de groote bogt van de maag, en met haar door een zeer kort *ligamentum gastro-lienale* verbonden, is de milt geplaatst †. De twaalfvingerige darm, die de gewone krommingen vertoont, is achter de lever, regts van de ruggegraat gelegen en door een kort *mesen-*

---

* Hiervan zou verschillen hetgeen men bij *Stenops javanicus* aantreft, waar, volgens SCHROEDER VAN DER KOLK en W. VROLIK, de twee uitlozingsbuizen der onderkaaks-speekselklier zich in eene enkele buis vereenigen, die onder de tong naar achteren loopt om zich bij het tongbeen te ontlasten. *Bijdragen tot de Dierkunde,* t. a. p., p. 38. Pl. I, fig. 5. Van de *glandulae sublinguales* wordt bij deze schrijvers geene melding gemaakt.

† Deze plaatsing der milt, aan de groote bogt der maag, schijnt bij Lemuriden algemeen te zijn. CUVIER, *Leç. d'Anat. comp., sec. édit.* IV. 2, p. 618.

terium aan den achterwand der buikholte bevestigd; terwijl het *pancreas* dwars voor de ruggegraat, op de gewone wijze achter de maag, en met zijn hoofd in de kromming van het *duodenum* gelegen is. De overige dunne darmen zijn gezamentlijk door een zeer lang *mesenterium* aan de wervelkolom opgehangen, en liggen overigens vrij in de buikholte. Dien ten gevolge heeft het *coecum* geene bepaalde ligging, en het lange *colon* loopt met verschillende kronkelingen door de buikholte, tot dat het zich onder de maag, als een zeer kort *colon transversum*, over het onderste gedeelte van den twaalfvingerigen darm heenslaat; het gaat vervolgens in het *colon descendens* over, hetgeen eenigzins links van de wervelkolom regt naar onderen loopt, en zonder eene *flexura sigmoidea* in den regter darm eindigt. Dit *colon descendens* is afzonderlijk door één zeer kort *mesenterium* aan de lendenstreek der wervelkolom verbonden, terwijl het *colon transversum* aan de groote curvatuur der maag door een *ligamentum gastro-colicum* verbonden is. Ofschoon een eigenlijk *omentum majus* ontbreekt, is er echter aan de oppervlakte over de dikke darmen van het *colon transversum* af tot aan het *coecum* eene verlenging van het *peritoneum* uitgespannen, maar dit vlies verbindt de afzonderlijke darmlussen van het *colon*, en eindigt naar onderen niet met eenen vrijen rand. Het *omentum minus* of *ligamentum hepatico-gastricum* is op de gewone wijze aanwezig, en tusschen dit deel en het *ligamentum hepatico-duodenale* vindt men eene ruime opening (*foramen Winslowi*), welke toegang verleent tot de *saccus retro-ventricularis* in het *peritoneum*.

De maag vertoont de gedaante, die aan deze familie en inzonderheid aan *Stenops* * eigen is. De *fundus ventriculi* is zeer groot, doordien de slokdarm zich digt bij den *pylorus* in de maag inplant, en dien ten gevolge is ook de bovenste bogt zeer klein in vergelijking der onderste. Ter zijde van den *pylorus*, die zich geheel aan den bovenrand bevindt, vormt de maag regts eene kleine blinde verlenging. Overigens heeft de maag eene gewone grootte †. In matig met lucht gevulden toestand was bij het eene voorwerp de lengte der maag van regts naar links 7 centim.; de *curvatura minor* was 1½ centim. lang; de lengte van den *fundus ventriculi* van regts naar links bedroeg 4½ centim.,

---

* Schroeder van der Kolk, *Bijdrage tot de Anatomie van Stenops Kukang*, p. 38.

† Zij schijnt individuele verscheidenheden aan te bieden, die vrij groot zijn. Althans in den vroeger onderzochten *Potto* (*Verh. der Eerste Kl. van het Kon. Nederl. Inst.* t. a. p.) was zij veel kleiner dan bij deze twee voorwerpen.

en dezelfde was de afmeting van boven naar beneden. Bij het andere voorwerp waren, bij overigens volkomen gelijken vorm, al de afmetingen iets geringer.

De dunne darmen zijn over de geheele lengte nagenoeg even wijd. Bij de dikke darmen daarentegen is de omvang op onderscheidene plaatsen zeer verschillend. Het is echter waarschijnlijk, dat dit verschil niet als de natuurlijke vorm moet worden beschouwd, want op de verwijde plaatsen was de darmwand veel dunner dan aan de vernaauwde gedeelten *. Aan het *colon* ontbreken de *ligamenta coli,* en van uitpuilende cellen (zoogenoemde *haustra*) ziet men slechts hier en daar zwakke aanduidingen. Het *coecum* is lang, van gelijkmatige wijdte, en bezit geen' *processus vermicularis* †. Aan dit deel van den dikken darm ziet men duidelijk langs de geheele lengte loopende strengen van den spierrok (*ligamenta coli*), en zijn ook de *haustra* regelmatig ontwikkeld §.

De wanden der maag en van de darmen zijn dun. Het slijmvlies der darmen is niet geplooid, met uitzondering van de *valvula pylori* en *coli.* Deze laatste klep is sterk ontwikkeld. De darmvlokken (*villi intestinales*) strekken zich over de geheele binnenvlakte der dunne darmen en van het bovenste gedeelte van het *colon* uit. Mikroskopisch onderzoek wees in het slijmvlies kleine buisvormige kliertjes en hier en daar gesloten *folliculi* aan.

Wat den inhoud van het darmkanaal aangaat, bij het eene voorwerp werden de maag en de dikke darmen matig gevuld aangetroffen. De ingesloten stof vertoonde zich als eene gelijkmatig grijze en korrelachtige massa, waarin het mikroskoop, benevens eene groote hoeveelheid vormlooze deeltjes en haren (volkomen gelijk aan die van het dier **), talrijke bolletjes aanwees, die door *iodium-tinctuur* blaauw gekleurd werden. Deze *amylum-bollen* waren gedeeltelijk vrij, gedeeltelijk in plantencellen ingesloten; ook zag men ledige plantencellen en hier en daar spiraalvaten. Overblijfsels van dierlijk voedsel

---

* Bij een jong voorwerp van *Stenops javanicus,* waar SCHROEDER VAN DER KOLK vele vernaauwingen in de darmbuis vond, waren de naauwe plaatsen even dunwandig als de wijde. *Tijdschrift voor Nat. Gesch. en Physiol.,* VIII, bl. 40.

† Bij andere soorten van *Stenops* vonden SCHROEDER VAN DER KOLK en W. VROLIK een enger verlengsel aan den blinden darm, dat eerstgenoemde vroeger als een *processus vermicularis* beschouwde; l. l. p. 50.

§ Zoo is ook het *coecum* van *Otolicnus Peli* bij KINGMA afgebeeld fig. 6.

** Door het likken van het dier met de spijzen ingeslikt, gelijk ook BURMEISTER bij *Tarsius* waarnam, l. l. S. 121.

b. v. spiervezels of tracheën van insekten waren nergens te ontdekken. Het is reeds vroeger vermeld, dat het dier van vruchten leeft *; het is echter mogelijk, dat deze voorwerpen levend gevangen zijn, en vervolgens alleen plantenvoedsel hebben ontvangen, en dat de *Potto* in zijnen natuurstaat ook dierlijk voedsel gebruikt. Bij het tweede voorwerp was het darmkanaal bijkans geheel ledig.

Wij willen hier nog de lengte van de afzonderlijke deelen van het darmkanaal bij beide onze voorwerpen opgeven.

	B.	A.
Lengte der tong	0,045	0,045
« van den pharynx en slokdarm . . .	0,110	0,100
« der maag	0,070	0,060
« der dunne darmen	0,800	0,850
« van het *colon* en *rectum*	0,950	0,920
« van het coecum	0,080	0,080
Lengte van het geheele darmkanaal . . .	2,055	2,035

De lengte van het ligchaam bedraagt bij A 0,404, bij B 0,421 (zie boven bl. 7), en derhalve is de verhouding van de lengte des ligchaams tot die van het darmkanaal bij A ongeveer als 1: 5, bij B als 1: 4, 9. Deze verhouding is bij A als 1: 6, 5, bij B als 1: 6, wanneer men, gelijk beter is, den staart niet opneemt in de afmeting der lengte van het ligchaam †. Volgens Schroeder van der Kolk is deze verhouding bij *Stenops Javanicus* gelijk 1: 5, 5, terwijl Meckel die voor *Stenops gracilis* opgeeft als 1: 4; Kingma bij *Otolicnus Peli* als 1: 4, 9. Wanneer derhalve bij *Stenops Potto* het darmkanaal eene grootere betrekkelijke lengte schijnt te hebben dan bij andere Lemuriden, hangt zulks waarschijnlijk te zamen met het plantenvoedsel, dat dit dier hoofdzakelijk of misschien uitsluitend gebruikt.

De lever van den *Potto* heeft ongeveer eene vierhoekige gedaante, in zoo ver namelijk de afmeting in de breedte met die van voren naar achteren bijkans volkomen overeenstemt. Deze afmeting bedroeg bij het voorwerp B 5 centimeters; bij A 6 centimeters. De hoofdverdeeling van het orgaan is

---

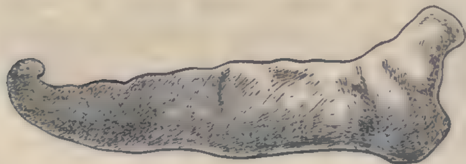
* V. d. Hoeven, *Over den Potto van Bosman*, l. l. p. 12.

† Waaraan het toe te schrijven zij dat ik in mijne *Bijdrage tot de kennis van den Potto*, bl. 7, deze verhouding opgegeven heb als 1: 11 is mij onverklaarbaar; mijne metingen gaven veeleer 1: 5, en er moet hier eene schrijf- of drukfout zijn ingeslopen. Overigens is de grootere lengte, welke de dikke darmen boven de dunne aanbieden, ook vroeger door mij opgemerkt.

in eene regter- en linkerkwab; deze waren bij het voorwerp B volkomen gescheiden, en hingen slechts aan den *hilus hepatis* door de vaten en het bindweefsel onderling zamen. De linker kwab, die eene eironde gedaante heeft, blijft verder onverdeeld; de regter wordt weder door eene diepe insnijding in eene voorste, grootere, en achterste, kleinere, kwab gescheiden. Deze laatste is onregelmatig van vorm, en heeft aan haren achterrand een paar dunne aanhangsels van leverzelfstandigheid. De regter voorste kwab heeft aan haren voorrand eene kleine inkerving; van daar loopt langs de ondervlakte het *ligamentum hepatis* naar den *hilus,* hetgeen zich verder naar den achterrand voortzet als *ductus venosus Arantii.* Op dezelfde plaats is aan de bovenvlakte, van den voor- naar den achterrand, het *ligamentum suspensorium hepatis* aangehecht. Regts van het *ligamentum teres* ligt verder, in eene uitholing aan de ondervlakte der regter voorste kwab, de kleine galblaas. De vaten, die aan den *hilus* in en uit de lever gaan, vertoonen niets bijzonders; zij zijn te zamen in het *ligamentum hepatico-lienale* ingesloten. De *vena cava inferior* komt aan den achterrand, nabij de verdeeling in de regter en linker kwab, met de lever in aanraking, en neemt hier de leveraderen in zich op. De *ductus choledochus* opent zich boven in het nederdalende gedeelte van den twaalfvingerigen darm.

In het andere exemplaar (A) was de lever veel grooter en dikker. Bij dit voorwerp waren de regter en linker kwab niet zoo volkomen gescheiden, maar aan de bovenvlakte, door eene smalle strook leverzelfstandigheid met elkaâr vereenigd. Ook was de galblaas in dit voorwerp veel grooter, en lag niet in eene holte aan de ondervlakte ingesloten, maar in eene diepe sleuf, die zich aan de regter voorste kwab van den voorrand tot aan den *hilus* uitstrekte *.

Het *pancreas* is klein en zeer ineen geschrompeld; overigens komt het in ligging en vorm met dat van den mensch overeen. De *ductus Wirsungianus* mondt gemeenschappelijk met den *ductus choledochus* in den twaalfvingerigen darm uit.



De milt (zie nevenstaande figuur) is een langwerpig, tongvormig deel. Haar linkereinde, dat aan den *fundus ventriculi* grenst, is eenigzins verdikt.

* Dergelijke onstandvastigheid namen SCHROEDER VAN DER KOLK en W. VROLIK ook bij de overige soorten van *Stenops* waar. *Bijdragen tot de Dierk.,* l. l. p. 51.

HET URO-GENITALE STELSEL.

De nieren liggen ter zijde van den tweeden en derden lendenwervel, de linker iets lager dan de regter. Zij hebben eenen elliptischen, van voren naar achteren platgedrukten vorm *. De *hilus renalis* is slechts weinig uitgesneden. Het nierenbekken (*pelvis renalis*) is zeer klein, en dien ten gevolge uitwendig aan den *hilus* niet zigtbaar; het vernaauwt zich ook niet, zoo als bij den mensch, langzamerhand tot den *ureter*, maar dit kanaal mondt met eene fijne opening midden in het nierenbekken uit.

De *bij-nieren* (*capsulae renales*) vertoonden zich als kleine, gele ligchaampjes, die boven de nieren geplaatst waren †.

De pisleiders (*ureteres*) loopen langs den *musc. psoas* naar beneden, dalen vervolgens tusschen de blaas en den regter darm in het bekken, en openen zich, na overkruising met het *vas deferens*, digt bij den hals der blaas in den *fundus*.

De blaas heeft eene eironde gedaante. De hals der blaas is als afzonderlijke vernaauwing achter de *pars prostatica urethrae* duidelijk aanwezig. Na matig met lucht te zijn opgevuld, vertoonde de pisblaas bij het eene voorwerp eene overlangsche afmeting van 53 m.m., eene dwarse, op haar midden, van 31 m.m. §.

De *urethra* is kort (32 m.m. lang), maar heeft overigens niets merkwaardigs, dan dat in haar verloop de tweede kromming gemist wordt, doordien de *penis* naar den buik is omgeslagen.

De beschrijving der voortplantingswerktuigen moet zich bepalen tot de mannelijke geslachtsdeelen, daar de gelegenheid ontbrak om een vrouwelijk voorwerp van den *Potto* te onderzoeken **. De *testes* zijn groot, en liggen

---

* In het eene voorwerp waren de nieren (vooral de nier der linkerzijde) ziekelijk ontaard; het geheele weefsel was doorzaaid met kleine cysten, en tevens waren de nieren zeer geatrophiëerd, en lagen los in het vezelachtig omkleedsel.

† Zij vertoonden zich zeer week en slap, misschien ten gevolge van het lang verblijf in den wijngeest

§ Bij het voorwerp met zieke nieren was de blaas veel kleiner.

** SCHROEDER VAN DER KOLK en W. VROLIK hebben drie vrouwelijke voorwerpen van *Stenops* onderzocht, en W. VROLIK onderzocht een mannelijk voorwerp van *Stenops gracilis*. *Bijdragen tot de Dierk.*, t. a. p. p. 52. W. VROLIK, *Nieuwe Verh. van de Eerste Kl. van het Kon. Nederl. Inst.*, X. p. 96, 97.

aan den onderrand van den buik achter den *penis* in het *scrotum*. Noch aan de ballen zelve noch aan de verschillende omkleedsels, die hen bedekken, viel iets bijzonders op te merken; aan den achterrand van den bal ligt de bijbal (*epididymis*), die langzaam in het *vas deferens* overgaat. De *funiculus spermaticus* is eene dikke streng door de sterke ontwikkeling van den *m. cremaster*. Aan de inwendige opening van het lieskanaal kruist zich het *vas deferens* met de *arteria epigastrica inferior*, en daalt vervolgens in de bekkenholte, om aan den hals der blaas zich met de *vesiculae seminales* te vereenigen. Deze blaasjes of klieren zijn bij den Potto bijzonder sterk ontwikkeld *, 22 m.m. lang en 10 m.m. breed; zij zijn naar buiten van het *vas deferens* aan de achtervlakte van de blaas gelegen.

De *prostata* heeft eene normale grootte, en bestaat uit twee zijdelingsche lobben, terwijl het voorste gedeelte van de klier door de *urethra* doorboord wordt. In dit gedeelte der *urethra* (*pars prostatica urethrae*) ziet men aan den achterrand den sterk ontwikkelden *colliculus seminalis*; deze heeft eene tepelvormige gedaante met den top naar binnen gekeerd, welke gespleten is in twee zijdelingsche verhevenheden, waaraan men de fijne openingen der *ductus ejaculatorii* waarneemt. Vóór den *colliculus seminalis* vormt de achterwand der *urethra* eene holte, waarin de uitlozingsbuizen der *prostata* uitloopen.

De *Cowpersche* klieren, onder de *prostata* aan het perineum gelegen, zijn, even als de *vesiculae seminales*, zeer groot. Zij hebben eene langwerpige, spoelvormige gedaante, en monden met eene fijne opening in den *bulbus urethrae* uit.

De lengte van den *penis* bedroeg 25 m.m. De *corpora cavernosa* nemen met eene breede aanhechting hunnen oorsprong van den nederdalenden tak van het schaambeen. In deze *corpora cavernosa* bevindt zich een beentje (*ossiculum penis*), dat aan den top van den eikel in een naar onderen omgebogen knopje eindigt. De monding der *urethra* ligt niet van voren aan den top van den eikel, maar achter het omgebogen uiteinde van dit deel, geheel naar onderen. Bovendien is nog opmerkelijk, dat de *glans*, behalve het *praeputium*, nog een tweede, inwendig omhulsel heeft, dat van onderen volkomen is, maar aan de bovenvlakte in het midden is ingesneden. Dit vrij

---

* Ook bij *Stenops gracilis* vond Vrolik ze zeer wijd. *Nieuwe Verh.*, l. l. p. 97.

dikke omhulsel is aan den rand regelmatig gekarteld en wordt door eene slijmvliesplaat gevormd; het mikroskopisch onderzoek toonde aan Dr. Boogaard in dit deel bindweefsel met enkele langwerpige kernen en fijne elastieke vezels benevens hier en daar fijne bloedvaatjes.

ADEMHALINGS-WERKTUIGEN.



Het strottenhoofd (*larynx*) biedt over het algemeen groote gelijkvormigheid aan met dat van den mensch. Het schildvormig kraakbeen (*cartilago thyreoidea*) bestaat uit twee smalle platen, die zich van voren onder eenen afgeronden hoek vereenigen. De bovenste hoornen (*cornua superiora*), die zich met het tongbeen verbinden, zijn zeer klein, terwijl de onderste, die op het ringvormig kraakbeen articuleren, betrekkelijk veel langer zijn dan bij den mensch. Aan het ringvormig kraakbeen (*cart. cricoidea*) ziet men op de breede achtervlakte eene overlangsche kam (*crista*). Het strotklepje (*epiglottis*) is breed; de zijranden zijn naar achteren omgebogen, en de bovenrand is halfmaansgewijs ingesneden *. De stembanden bieden niets opmerkelijks aan; de *ventriculi Morgagni* zijn zeer ruim.

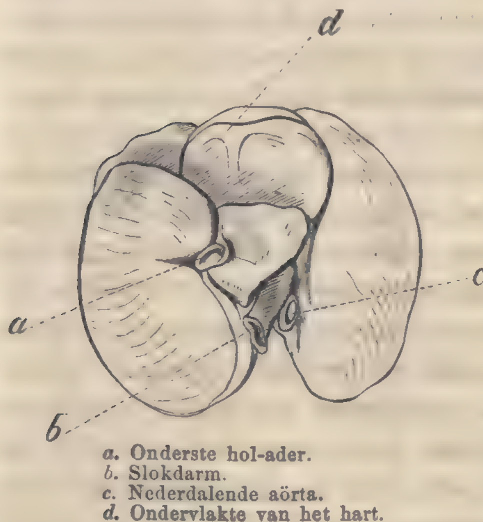
De luchtpijp (*trachea*) is bij het eene voorwerp (A) 56 m.m. lang en telt 37 kraakbeenige ringen; bij het andere (B) 53 m.m., en heeft 34 zulke ringen. Aan de achtervlakte wordt een klein gedeelte dezer ringen door vezelachtig weefsel aangevuld. Van boven naar onderen nemen deze kraakbeenige ringen in hoogte af; sommige zijn aan de eene of andere zijde gespleten. Op de gewone hoogte is de luchtpijp in de beide *bronchi* verdeeld. De regter *bronchus* is wijder en korter dan de linker, en verdeelt zich in vier takken, terwijl de linker zich slechts in twee takken splitst. Deze bronchiale vertakkingen verlieten onmiddellijk na hare intrede in het longweefsel hare kraakbeenige ringen en worden geheel vliezig. De longen hebben de gedaante van eenen halven kegel, en reiken beiden even ver naar beneden. De linker long bestaat slechts uit twee kwabben, waarvan de onderste de grootste

---

* Even zoo is de *epiglottis* bij de overige soorten van *Stenops* gevormd. Schroeder van der Kolk en W. Vrolik, *Bijdragen tot de Dierkunde* t. a. p., bl. 47.

is. De regterlong is in vier kwabben verdeeld, eene bovenste en drie, meer naar beneden gelegen kwabben, die men, volgens hare ligging, in eene voorste, achterste en binnenste kan onderscheiden. De binnenste lob is de kleinste, en ligt tusschen de voorste en achterste ingesloten, zoodat zij op de oppervlakte niet zigtbaar is. Verder bespeurt men aan deze binnenste lob eene diepe sleuf, waarlangs de onderste holle ader (*vena cava inferior*), tusschen haar en de achterste lob, in de borstholte naar de regter voorkamer van het hart opstijgt *.

Ondervlakte der longen en van het hart.



a. Onderste hol-ader.
b. Slokdarm.
c. Nederdalende aörta.
d. Ondervlakte van het hart.

De schildklier (*glandula thyreoidea*) is klein, en wordt gevormd door twee, niet door eenen *isthmus* verbonden, zijdelingsche deelen †, die de eerste ringen der luchtpijp bedekken.

Van eene *glandula thymus* kon geen overblijfsel gevonden worden.

HART- EN VAATSTELSEL.

Het hart is, behalve door het hartezakje, van voren ook nog door een gedeelte der pleura bekleed. De *pleura costalis* strekt zich namelijk naar voren tot het midden van het borstbeen uit; hier ontmoeten aldus die, van beide zijden liggende, sereuse vliezen elkander, en zij slaan zich dan in eene plooi

* Eveneens bestaat ook bij de overige soorten van *Stenops* de regter long uit vier, de linker uit twee lobben. SCHROEDER VAN DER KOLK en W. VROLIK, *Bijdragen tot de Dierkunde*, t. a. p. p. 47. Ik vond, in het vroeger door mij onderzochte voorwerp van *Potto*, drie lobben in de linker long. *Verh. van de Eerste Kl. van het Kon. Nederl. Inst.* l. c. p. 7. Dat zal derhalve eene afwijking zijn. Ook KINGMA vond bij *Otolicnus Peli* vier lobben in de regter- en twee in de linker long, t. a. p. blz. 42. Bij *Tarsius* telde BURMEISTER zes kwabben in de regter- en vijf in de linker long, terwijl CUVIER en MECKEL (*Syst. der vergl. Anat.*, VI. S. 422) slechts vier lobben in de regter-, drie in de linker long van dit dier telden.

† Evenzoo vond KINGMA ook twee zijdelingsche, niet verbonden schildklieren bij den door hem onderzochten *Otolicnus*, t. a. p. blz. 42.

naar achteren, om, langs het *pericardium* en met zijne oppervlakte eenigzins vergroeid, aan den linker *hilus pulmonum* in het *viscerale* blad over te gaan. Het hartezakje is eng om het hart gesloten, en van onderen niet aan het peesachtig deel van het middenrif vastgegroeid. Het hart zelve is breed, en heeft ongeveer de gedaante van eenen stompen kegel. Het ligt bijna in dezelfde schuinsche rigting als bij den mensch, en is eenigzins om zijne lengte-as gedraaid, want aan de voorvlakte is slechts een gering gedeelte van de linkerkamer zigtbaar. Op de voorvlakte ziet men eene flaauwe aanduiding van eenen *sulcus longitudinalis*, die zich regts van de punt naar de achtervlakte ombuigt. In zamenstelling komt het hart geheel overeen met dat van den mensch, zoo dat eene verdere beschrijving niet noodig schijnt te zijn.

Aan de inmonding der onderste holle ader in de regter voorkamer is een rudiment der *valvula Eustachii*. Op den overgang van den achter- en binnenwand heeft men de inmonding van de *vena coronaria cordis* met de *valvula Thebesii*. Ook de *fossa ovalis* is duidelijk te onderscheiden. In de kamers konden wij noch aan de *valvulae tricuspidales* en *mitrales*, noch aan de *valvulae semilunares* eenige bijzonderheid opmerken; de oorsprong der *arteriae coronariae cordis* valt boven het bereik der laatstgenoemde klapvliezen.

Boven het hart zijn in het *cavum mediastini anterius* gelegen van regts naar links: de bovenste holle ader, de groote slagader en de longslagader. In de vorming der bovenste holle ader uit de beide *venae anonymae* is niets bijzonders op te merken. De *aörta*, aan haren oorsprong door den bulbus der longslagader bedekt, buigt zich bijkans onmiddellijk als *arcus aörtae* naar achteren om. De longslagader, die zich aan den hollen rand van den slagaderboog in hare twee takken verdeelt, is daarom eveneens zeer kort. De longaderen komen met die van den mensch overeen.

Uit den boog der *aörta* ontspringen, zoo als bij de meeste zoogdieren, twee vaatstammen, eene *arteria innominata* en de *arteria subclavia sinistra* *. De

---

* Deze oorsprong der hoofdstammen van de slagaderen bij den *Potto* werd ook door mij vroeger opgemerkt. Hij komt ook overeen met hetgeen bij de overige soorten van *Stenops* werd waargenomen, hoezeer somtijds de menschelijke inrigting (*truncus anonymus*, *arteria carotis sinistra* en *art. subclavia sinistra*) en ook eene verdeeling in twee stammen (beide *trunci anonymi*) door SCHROEDER VAN DER KOLK en W. VROLIK opgeteekend werden. *Bijdr. tot de Dierk.* l. c. p. 47, 48. Dit laatste werd door SCHROEDER VAN DER KOLK bij het jonge voorwerp van *Stenops javanicus*, door hem in 1826 onderzocht, gevonden. *Tijdschr. voor Nat. Gesch. en Physiol.*, VIII, 1841. De, in den tekst opgegeven oorsprong der slagaderstammen is echter ongetwijfeld bij alle soorten van *Stenops*

eerstgenoemde slagader, veel sterker dan de laatste, geeft nog in de borstholte de linker *arteria carotis* af, en splitst zich daarna, achter de *arteria sterno-clavicularis*, in de *arteria carotis dextra* en *art. subclavia dextra.*

De beide *arteriae carotides communes* stijgen langs de zijden der luchtpijp loodregt naar boven, en verdeelen zich op de gewone hoogte in eene *carotis externa* en *interna.* De *carotis externa s. facialis* loopt, door den achtersten buik van den *musculus biventer* bedekt, naar den hoek der onderkaak, en doorboort vervolgens de *glandula parotis,* om achter den *ramus maxillae* als *arteria temporalis* en *maxillaris interna* te eindigen. In dezen loop geeft zij, nagenoeg zoo als bij den mensch, behalve eenen sterken spiertak voor den *musculus sternocleido-mastoideus,* naar voren af: 1) *de arteria thyreoidea superior,* 2) de *arteria lingualis* en 3) de *art. maxillaris externa;* naar binnen zendt zij de sterke *arteria pharyngea adscendens* af en naar achteren een takje, dat aan den achterrand der parotis zich in tweeën splitst; een dezer takjes verspreidt zich als *art. auricularis posterior* in het uitwendig oor, terwijl het andere dwars over de bovenste aanhechting van den *musculus sterno-cleidomastoideus* naar het achterhoofd verloopt, en zich daar als *art. occipitalis* verspreidt.

De *a. carotis interna s. cerebralis,* naar binnen en achteren van de *carotis externa* gelegen, stijgt door het *foramen caroticum* in de schedelholte, alwaar zij verder door den *sinus cavernosus* naar voren loopt. De takverdeeling komt, voor zoo ver wij konden nagaan, overeen met die bij den mensch; ook vereenigen zich de beide inwendige carotiden door eenen sterken *ramus communicans posterior* met de *art. vertebralis* tot eenen *circulus arteriosus Willisii.*

De *vena jugularis interna,* die bij den mensch met de *art. carotis* in eene scheede bevat is, verloopt hier aan den hals geheel naar achteren van de *art. carotis,* doordien het *foramen jugulare* aan den grond van den schedel ver achter het *foramen caroticum* is gelegen. Deze ader ontstaat aan het *foramen jugulare* uit den *sinus transversus,* en ontlast zich naar beneden in de *vena anonyma.* Aan den hals neemt zij alleen de aderen van den *pharynx* en *larynx* en van de tong op, terwijl de *vena facialis anterior* en de *vena facialis posterior* aan den hoek der onderkaak in de *vena jugularis ex-*

---

de gewone; hij schijnt bij de Lemuriden regel te zijn, en werd ook door Dr. KINGMA bij *Otolicnus Peli* aangetroffen.

terna overgaan. Deze *vena* loopt oppervlakkig over den *musculus sterno-cleidomastoideus* naar beneden en achteren, en vereenigt zich achter het sleutelbeen met de *vena cephalica* tot een' aderstam, die onder het sleutelbeen in de *vena axillaris* inmondt.

De *arteria subclavia* treedt bij haren loop niet tusschen de *musculi scaleni* heen, aangezien de *musculus scalenus anticus*, zoo als wij reeds bij de spieren hebben opgeteekend, afwezig is. Deze slagader ligt onder den *plexus brachialis* en onmiddellijk achter de *vena subclavia*.

De takken, die wij uit de *arteria subclavia* zien ontspringen, zijn, behalve spiertakken voor de oppervlakkige hals- en nekspieren, de volgende slagaderen:

Arteria vertebralis; zij dringt naar boven toe spoedig in het wervelkanaal.

Arteria mammaria internâ; zij treedt met den *nervus phrenicus* achter de eerste rib binnen de borstholte, en heeft verder den gewonen loop.

Arteria cervicalis profunda; zij ontspringt naar buiten van de *arteria vertebralis*, en verspreidt zich in de diepe nekspieren;

en ten laatste een tak, die dwars door den nek naar buiten loopt, en, behalve verscheidene spiertakken, de *arteria transversa scapulae* afgeeft.

De *arteria* en *vena axillaris* gaan, na eerst de omliggende spieren met takken te hebben voorzien, aan den onderrand der okselholte beide geheel over in het wondernet der voorste ledematen. Dit wondernet heeft eenen vrij grooten omvang, en bestaat uit zeer fijne, evenwijdig loopende vaten. Het ligt in den *sulcus bicipitalis internus*, en geeft verscheiden takjes af voor de spieren van den bovenarm *. Ongeveer op het midden van den bovenarm verdeelt het zich in twee bundels. Het diepere gedeelte treedt met den *nervus medianus* door het *foramen supracondyloideum*, en verbergt zich verder onder de buigspieren, die van den *condylus internus humeri* ontspringen; het meer oppervlakkige gedeelte loopt naar de *plica cubiti*, alwaar het door eene boogvormige anastomose zich verbindt met de *vena cephalica*, en verder naar beneden overgaat in de *arteria* en *vena radialis*. Deze vaten loopen tusschen dezelfde spieren als bij den mensch naar den *carpus*, en verspreiden zich verder zoo wel in de palm als over den rug van de hand. De *arteria ulnaris* en *vena ulnaris* zijn het vervolg van het diepere gedeelte van het

* De *art. humeralis profunda* ontspringt, volgens W. Vrolik, niet uit het wondernet maar uit de *art. axillaris* zelve. *Nieuwe Verh. der Eerste Klasse van het Kon. Nederl. Inst.*, Deel X, p. 88.

wondernet, en komen op het midden van den voorarm tusschen den *musculus flexor carpi ulnaris* en *m. flexor digitorum communis* te voorschijn. Vergezeld van den *nervus ulnaris,* verloopen zij verder over het *ligamentum carpi transversum* naar de handpalm, alwaar zij zich boogvormig naar de radiale zijde ombuigen, en den oorsprong geven aan vier *arteriae* en *venae digitales volares.*

De *vena basilica* ontbreekt. De *vena cephalica* is eene vrij dikke ader, die in haar verloop geheel met die van den mensch overeenkomt. Zoo als wij reeds vermeld hebben, treedt deze ader aan de *plica cubiti* in verbinding met de aderen van het wondernet, en vereenigt zich later met de *vena jugularis externa* tot eene gemeenschappelijke inmonding in de *vena axillaris.*

Keeren wij thans, na de vaten van de voorste deelen des ligchaams te hebben beschouwd, tot de *aörta* weder. Nadat uit den boog van dezen hoofdstam de boven vermelde slagaderen ontsproten zijn, slaat zich de *aörta* over den linker bronchus naar achteren, en loopt verder langs de wervelkolom door de borst- en buikholte naar achteren, totdat zij zich in de beide *arteriae iliacae communes* verdeelt.

In de borstholte wordt de *aörta* ook overkruist door den slokdarm. De takken, die de *aörta thoracica* afgeeft, vertoonen niet de minste afwijkingen van die bij den mensch.

Regts van de wervelkolom verloopt de *vena azygos* in het *cavum mediastini posterius;* deze ader komt in alle opzigten met die bij den mensch overeen. De *vena cava inferior* stijgt, zoo als wij reeds bij de beschrijving der longen hebben opgeteekend, in de borstholte tusschen de binnenste en achterste kwab der regter long omhoog, en ontlast zich in den achterwand van den regter voorhof.

De *aörta abdominalis* loopt met de *vena cava inferior* voor de lendenwervels naar beneden. De verdeeling dezer vaten is ongeveer dezelfde als bij den mensch. Nog tusschen de *crura* van het *diaphragma* ontspringt de *arteria coeliaca* en onmiddellijk daaronder de *art. mesenterica superior,* terwijl de *art. mesenterica inferior* ongeveer 4 centimeters lager haren oorsprong neemt. De *arteriae renales* gaan in het eene voorwerp ongeveer onder eenen regten hoek naar den *hilus renalis,* terwijl die der linker zijde veel lager dan die der regterzijde uit de *aörta* ontspringt. In het andere voorwerp ontspringen beide slagaderen op gelijke hoogte, en verloopt die van den linkerkant schuins naar den *hilus.* De *arteriae spermaticae internae* ontspringen nagenoeg op dezelfde hoogte als de *arteria mesenterica inferior,* en loopen

vervolgens langs de voorvlakte van den *musculus psoas* naar de inwendige opening van het lieskanaal. De *vena spermatica* ontlast zich aan de linkerzijde in de linker *vena renalis;* de *vena spermatica dextra* loopt in de *vena cava inferior* uit.

Eene vrij sterke *arteria sacra media* ontspringt uit de achterzijde van de *aörta,* en evenzoo vertoont zich eene *vena sacra media,* die in de *vena cava inferior* overgaat, een weinig boven de verdeeling dezer vaatstammen in de *iliacae communes.* Deze vaten, die langs de voorvlakte van het sacrum en van den staart verloopen, vertoonen bij den Potto geen wondernet.

De *arteriae iliacae communes* zijn kort, en verdeelen zich weldra in *art. hypogastricae* en *art. crurales.* Ten opzigte van de takverdeeling der *arteria hypogastrica* is alleen te vermelden, dat de *art. pudenda* niet door het *foramen ischiaticum majus* het bekken verlaat, maar onmiddellijk ter zijde van de *vesiculae seminales* door de bekkenholte naar den onderrand van de *symphysis* verloopt om aldaar in zijne eindtakken, de *arteria dorsalis* en *profunda penis,* over te gaan.

De *arteria cruralis* loopt langs de binnenzijde van den *musculus psoas* naar de voorvlakte van de dij, alwaar zij spoedig, ongeveer 15 m.m. onder het *ligamentum Poupartii,* geheel in het wondernet der achterste ledematen overgaat. Bij haren uitgang uit de buikholte geeft echter de *arteria cruralis* eerst naar binnen de *art. epigastrica inferior* en naar buiten de *art. circumflexa ilii* af. De *vena cruralis,* naar binnen van de slagader gelegen, gaat niet geheel (zoo als de *vena brachialis* in de voorste ledematen) in het wondernet over, maar hangt slechts met enkele takken daarvan te zamen, terwijl lager de *vena cruralis* aan de achterzijde van het wondernet langs de dij naar beneden loopt. Het wondernet zelve heeft ongeveer dezelfde gedaante als dat der voorste ledematen. Het ligt, bedekt door den *musculus sartorius,* tusschen den *vastus internus* en de *m.m. adductores femoris.* Er ontspringen onderscheidene takken uit, die zich aan de dij in de spieren verspreiden.

Van onderen aan de dij splitst ook dit vaatnet zich in twee gedeelten; het eene gedeelte dringt tusschen den *musculus sartorius* en *m. gracilis* naar de oppervlakte, en gaat beneden de knie aan de binnenzijde van den schenkel in twee vaatstammen over. Een dezer stammen is de *vena saphena magna;* zij verloopt met den *nervus saphenus major* naar de binnenzijde van den voet; de andere is de *arteria tibialis postica,* door de gelijknamige *venae* omgeven; deze slagader daalt langs de binnenachtervlakte van

den schenkel oppervlakkig naar beneden, totdat zij aan den binnenrand van den *tendo Achillis* meer in de diepte dringt, en, vergezeld van den *nervus tibialis posticus,* achter den *malleolus internus* naar de voetzool verloopt, alwaar zij in de *arteria plantaris interna* en *externa* eindigt. Het andere gedeelte van het wondernet gaat naar de *fossa poplitaea,* en wordt aan zijne achtervlakte door de voortzetting van de *vena cruralis* vergezeld, die, zoo als wij boven vermeld hebben, alleen door takken aan het wondernet deel neemt. Om in de *fossa poplitaea* te komen behoeven deze vaatstammen den *musculus adductor magnus* niet te doorboren, want deze spier plant zich slechts aan de bovenhelft van het dijbeen in. Dit gedeelte van het wondernet voorziet in de kniekuil de spieren, die aan de achtervlakte van den schenkel liggen, van slagaderen, en gaat daarna over in de *arteria tibialis antica.* De *venae tibiales* zijn daarentegen met de *vena poplitaea* verbonden, die in de kniekuil ook nog de *vena saphena minor s. externa* opneemt. De *arteria tibialis antica* treedt door het *interstitium interosseum* naar de voorvlakte van het onderbeen, en loopt verder langs de *membrana interossea,* onder het *ligamentum annulare,* naar de rugzijde van den voet.

Zoo als bekend is, worden bij vele zoogdieren, bij andere soorten van *Stenops,* bij *Otolicnus, Tarsius* onder de Lemuriden en ook bij *Myrmecophaga* en *Bradypus* wondernetten of vaatvlechten aan de ledematen en ook aan den staart aangetroffen. Uit de voorafgaande beschrijving nu volgt, dat de vaatvlechten van de ledematen van den Potto in zamenstelling daarmede zeer overeenkomen. Het zijn wondernetten, die uit talrijke, zeer fijne, evenwijdig loopende vaatjes bestaan, en zoowel van aderlijken als slagaderlijken aard zijn; de slagader, die het wondernet helpt zamenstellen, laat zich niet als stam door de vlecht vervolgen, maar lost er zich geheel in op *. Evenmin kan de aderstam door deze wondernetten vervolgd worden. De vaatvlechten van den *Potto* behooren derhalve tot de *retia mirabilia diffusa,* want uit het wondernet zelve ontspringen eerst verscheidene fijnere spiertakken, en daarna vereenigen zich de vaatjes langzamerhand tot enkelvoudige vaatstammen.

---

* Volgens Meckel, *Syst. der vergleichenden Anatomie,* V. S. 342, is dit ook het geval bij *Stenops, Tarsius* en *Myrmecophaga;* bij *Bradypus* gaat de stam der *arteria brachialis* en *cruralis* onverdeeld door het wondernet heen. Evenwel hebben ook Vrolik en Schroeder van der Kolk zulk eene inrigting bij *Stenops javanicus* gevonden. *Bijdragen,* enz. bl. 48.

ZENUWSTELSEL.

Tot mijn leedwezen kan ik alleen van het peripherisch gedeelte van het zenuwstelsel eene meer naauwkeurige beschrijving geven. De centrale deelen, de hersenen en het ruggemerg, waren zoo week geworden, dat het niet mogelijk was deze deelen eenigzins in zamenhang uit de schedelholte en het ruggemergskanaal te nemen.

Uit een vroeger onderzocht voorwerp zijn echter bij de Bijdrage tot de kennis van den *Potto* twee afbeeldingen der hersenen, eene van de bovenvlakte en eene van de grondvlakte, gevoegd. Uit deze afbeeldingen blijkt, dat de zamenstelling der hersenen, ten minste uitwendig, niet zeer verschilt van die der overige Lemuriden. De halfronden der groote hersenen hebben eene ovale gedaante, en laten van achteren de kleine hersenen grootendeels onbedekt. De *gyri* aan de oppervlakte zijn weinig ontwikkeld. Aan de kleine hersenen is de *vermis* zeer groot en puilt sterk uit. Ook is de *flocculus* zeer ontwikkeld, en deze ligt grootendeels in eene afzonderlijke holte van de piramide van het slaapbeen *. Aan de grondvlakte der hersenen ziet men slechts eene zwakke aanduiding van de *fossa Sylvii* als scheiding van de halfronden in eene voorste en achterste kwab. Verder bemerkt men aan deze afbeelding, behalve den oorsprong der verschillende hersenzenuwen, van voren de sterk ontwikkelde, inwendig holle *processus mamillares*; daarachter ziet men het *chiasma nervorum opticorum*, hetgeen eene breede commissuur der gezigtszenuwen daarstelt. Het *tuber cinereum* heeft de gewone gedaante, maar de daarachter gelegene *corpora candicantia* zijn tot een ronden knobbel vergroeid. De *pons Varolii* is zeer plat; aan den voorrand van dit deel komen de uiteenwijkende *crura cerebri* te voorschijn. Aan het verlengde merg zijn de piramiden-strengen vooral duidelijk †.

* Volgens FOVILLE is de *flocculus* in dezelfde verhouding als de gehoorzenuw ontwikkeld; bij hazen en konijnen, die een zeer scherp gehoor hebben, vindt men den *flocculus* zeer groot. SCHROEDER VAN DER KOLK en VROLIK, l.l. p. 33.

† Men vergelijke hiermede de meer uitvoerige beschrijving der hersenen van *Stenops javanicus*, gegeven door de H.H. SCHROEDER VAN DER KOLK en W. VROLIK, p. 30—33. Pl. I, fig. 1—4. In de hoofdzaken komen de hersenen bij beide soorten overeen.

Hersenzenuwen.

I. *Nervus olfactorius*. De holle *processus mamillares* vormen van voren eenen zeer sterken *bulbus olfactorius*, die de diepe kuil tusschen de *partes orbitales* van het voorhoofdsbeen geheel opvult. Uit de onderzijde van dezen *bulbus* komen de zenuwtakjes, de eigenlijke reukzenuwen, te voorschijn, die door de gaatjes van het zeefbeen naar de neusholte loopen.

II. *Nervus opticus*. Deze zenuw vertoont geene bijzonderheden.

III, IV en VI. Het derde, vierde en zesde paar komen, zoo als uit de afbeelding blijkt, op dezelfde plaats uit de hersenen te voorschijn als bij den mensch. De zenuwen van het derde en vierde paar (*nervus oculo-motorius* en *n. trochlearis*) loopen langs den bovenrand van den *sinus cavernosus*, terwijl het zesde zenuwpaar (de *nervus abducens*) door de holte van den *sinus* heengaat. Doordien de *fissura orbitalis superior* ontbreekt, dringen deze zenuwen door het *foramen rotundum* in de oogholte. Zij verspreiden zich, voor zoo ver wij konden nagaan, op de gewone wijze in de oogspieren.

V. *Nervus trigeminus*. Deze zenuw ontspringt met twee wortels ter zijde uit den *pons Varolii*. Het *ganglion Gasseri* ligt in eene diepe uitholing aan de punt van het rotsbeen. Uit de voorzijde van het *ganglion* ontspringen de drie takken der zenuw. De eerste en tweede tak loopen, onmiddellijk naast elkander gelegen, naar voren, en verlaten door dezelfde opening (het *foramen rotundum*) de schedelholte, terwijl de derde tak door het, ver naar achteren gelegen, *foramen ovale* naar buiten gaat.

1. Aan den *ramus ophthalmicus* waren in de oogholte de drie hoofdtakken, namelijk de *nervus frontalis, n. lacrymalis* en *n. nasociliaris*, duidelijk te vervolgen. De *n. nasociliaris* loopt schuins over den *nervus opticus* naar den binnenoogwand, en geeft aldaar den *n. ethmoidalis* af, die door het *foramen ethmoidale* naar de schedelholte loopt, en vervolgens door een gat der *lamina cribrosa* in de neusholte dringt.

2. *Ramus supramaxillaris*. De tweede tak van het vijfde paar loopt van het *foramen rotundum* af langs den bodem der oogkas naar voren, en gaat door den *sulcus* en het kanaal onder de oogkas naar het aangezigt, waar hij met verscheiden takken in de bovenlip en den neusvleugel eindigt. Vóór dat de zenuw in den *canalis infra-orbitalis* dringt, geeft zij eenen *nervus dentalis superior* af; deze zenuw gaat door eene eigene opening aan den bodem der oogholte naar het *antrum Highmori*, en verspreidt zich verder in de kiezen en tanden der bovenkaak. Voorts ontspringen in de diepte der oogkas

uit den *ramus supramaxillaris* twee sterke takken; een van deze (*n. nasalis posterior*) gaat door het vroeger beschreven *foramen spheno-palatinum* naar de neusholte; de tweede (*n. palatinus descendens*) loopt door den *canalis pterygo-palatinus* en verspreidt zich in het slijmvlies van het gehemelte. (Een *ganglion spheno-palatinum* heeft VAN CAMPEN niet kunnen vinden, en waarschijnlijk is dit ook niet aanwezig, aangezien de *n. nasalis posterior* en *n. palatinus descendens* uit den *ramus supramaxillaris* zelven hunnen oorsprong nemen, en ook de *canalis vidianus* ontbreekt.)

3. *Ramus inframaxillaris.* Door het eironde gat aan de buitenvlakte van den schedel gekomen, voorziet deze tak eerst de kaauwspieren met onderscheidene takjes (*n. crotaphitico-buccinatorius*), en geeft bovendien, zoo als bij den mensch, drie takken af. De *n. auriculo-temporalis* heeft den gewonen loop en de gewone verspreiding. De *n. alveolaris inferior* en *n. lingualis* loopen tusschen de beide *musculi pterygoidei* (den in- en uitwendigen) van binnen naar buiten, waarna de *n. alveolaris inferior* onmiddellijk in het tandkaskanaal binnendringt, terwijl de *n. lingualis* tusschen de binnenvlakte der onderkaak en den *musculus pterygoideus internus* verder naar beneden en voren loopt, om tusschen den *m. hyoglossus* en *m. genioglossus* ter zijde in de tong te dringen.

VII en VIII. De *n. facialis* en *n. acusticus* gaan den *meatus auditorius internus* binnen; de *n. facialis* doorloopt verder den *canalis Fallopiae* en komt door het *foramen stylomastoideum* naar buiten. Vervolgens geeft de zenuw eerst een' *n. auricularis posterior* af, en doorloopt verder de *glandula parotis* van achteren naar voren, waarna zij zich met onderscheidene takken dwars over den *musc. masseter* over het aangezigt verspreidt.

IX. De *n. glossopharyngeus* komt door het *foramen jugulare* uit de schedelholte, loopt verder langs den *musc. stylo-pharyngeus* tusschen de *art. carotis interna* en *externa* naar binnen, en eindigt als *ramus lingualis* in het achterste gedeelte der tong. In haren loop geeft de zenuw takken af aan den *musc. stylo-pharyngeus* en den wand van den pharynx.

X. De *nervus vagus* neemt geheel denzelfden loop als bij den mensch. Ook de takverdeeling levert geen bijzonder verschil op. De sterkste tak aan den hals is de *n. laryngeus superior*, die zich op de gewone wijze in den *larynx* verspreidt. In de borstholte gekomen, geeft de *n. vagus* den *nerv. laryngeus recurrens* af, die zich regts om de *subclavia*, links om den *arcus aortae* heenslaat, om tusschen de luchtpijp en den slokdarm naar het strotten-

hoofd op te klimmen. Opmerkelijk is het, dat de *n. vagus* van boven aan den hals, op de plaats, waar bij den mensch de *plexus nodosus Meckelii* ligt, een vrij groot ganglion bezit; op dezen knoop komen wij bij den *nervus sympathicus* terug.

XI. De *n. accessorius Willisii,* door het *foramen jugulare* de schedelholte verlaten hebbende, doorboort op de gewone wijze, daaraan takken afgevend, den *m. sternocleidomastoideus,* en eindigt in den *m. cucullaris.*

XII. De *n. hypoglossus* verlaat de schedelholte door het *foramen condyloideum anterius,* en loopt aan den hals langs den achtersten buik van den *m. digastricus* in een' boog naar voren; vervolgens splitst zich deze zenuw in twee takken, die, bedekt door den *m. mylohyoideus,* in de spieren der tong overgaan. De nederdalende tak is duidelijk langs de *carotis* te vervolgen.

Ruggemergzenuwen.

De ruggemergzenuwen komen natuurlijk over het algemeen geheel overeen met die van den mensch. Uit het ruggemergskanaal te voorschijn getreden, verdeelen zich de zenuwen in eenen voorsten en achtersten tak; de achterste takken verspreiden zich in de nek- en rugspieren, terwijl de voorste onderling zenuwvlechten helpen zamenstellen.

Aan den *plexus cervicalis* is niets bijzonders op te merken. Onder de takken dezer vlecht zijn de voornaamste: de *n. auricularis magnus,* die schuins over den *m. sternocleidomastoideus* naar het oor opstijgt, en de *n. phrenicus.* Doordien de *m. scalenus anticus* niet aanwezig is, loopt deze zenuw aan den hals dwars van den *plexus brachialis,* van welke vlecht zij ook zenuwtakjes opneemt, naar beneden, en dringt de borstholte binnen, waar zij tusschen de *pleura* en het hartezakje naar het middenrif voortloopt.

De *plexus brachialis* wordt door de vier onderste halszenuwen en de eerste borstzenuw gevormd, en ligt aan den hals vóór den *m. scalenus medius.* Met de *art. subclavia* strekt zich deze vlecht naar de okselholte uit, alwaar zij deze slagader op de gewone wijze omgeeft. De takken uit den *plexus brachialis* zijn nagenoeg dezelfde als bij den mensch. Boven het sleutelbeen geeft zij de *n. n. thoracici, subscapulares* en den *n. supraspinatus* af, die door de *incisura scapulae* naar den *m. supraspinatus* loopt. In de okselholte ontspringt uit de armvlecht de *n. cutaneus medius;* deze splitst zich boven

den elleboog in twee takken, die in de huid van den voorarm overgaan. Ook verspreiden zich doorborende takken der *nervi intercostales* in de huid en de binnenzijde van den bovenarm. De *nervus cutaneus brachii externus* is zeer sterk, en doorboort, zoo als bij den mensch, den *m. coraco-brachialis*, geeft aan deze spier, gelijk ook aan den *m. biceps* en *m. brachialis internus*, takken af, en komt vervolgens aan den *sulcus bicipitalis externus* te voorschijn. Aan den voorarm loopt de zenuw verder oppervlakkig langs de radiale zijde naar beneden, verbindt zich boven den *carpus* met een takje van den *n. medianus*, en eindigt in de huid aan de oppervlakte van den duim. De *n. circumflexus humeri* verhoudt zich even als bij den mensch. De *n. medianus* omvat met zijne wortels de *art. axillaris*, en loopt in den *sulcus bicipitalis externus* langs het wondernet naar beneden; boven den elleboog gaat deze zenuw met een gedeelte der vaatvlecht door het *foramen supracondyloideum*, en komt eerst op het midden van den voorarm weder te voorschijn; zij loopt verder tusschen den *m. flexor carpi radialis* en *m. flexor digitorum sublimis* onder het *ligamentum carpi transversum* naar de handpalm, alwaar zij in de zijden der vingers, uitgenomen den vijfden vinger en de buitenzijde van den vierden vinger, eindigt. Bovendien geeft zij onder den elleboog den *n. interosseus* af, en lager aan den voorarm een' tak, die bij den mensch niet voorkomt; deze gaat naar de oppervlakte, verbindt zich met den *n. cutaneus externus*, en verspreidt zich vervolgens in de spiertjes van den *thenar* en in de huid aan de volaire vlakte van den duim.

De *n. ulnaris* heeft volkomen denzelfden loop als bij den mensch, en splitst zich onder aan den voorarm in een' *ramus dorsalis* en *volaris*. De eerstgenoemde tak slaat zich om de *ulna* naar de rugvlakte, en verspreidt zich alleen in de huid van den vijfden vinger. De tweede tak loopt over het *ligamentum carpi transversum* tusschen het *os pisiforme* en de *art. ulnaris* naar de handpalm, alwaar hij, in eenen oppervlakkigen en diepliggenden tak gesplitst, zich op de gewone wijze verspreidt.

De *n. radialis* wendt zich spiraalsgewijs om het opperarmbeen heen, en komt dan in den *sulcus bicipitalis externus*. Reeds hoog in deze groeve verdeelt zich de zenuw in twee takken. Een van deze, *ramus dorsalis s. superficialis*, doorboort den oorsprong van den *m. supinator longus*, en loopt, onmiddellijk onder de huid gelegen, langs het midden van de rugvlakte van den voorarm naar de hand, om in de huid der drie middelste vingers te ein-

digen. Deze zenuw heeft derhalve een' geheel anderen loop en eene andere verspreiding dan de gelijknamige bij den mensch. De andere tak van den *n. radialis* komt overeen met den *nervus radialis profundus*. Deze loopt langs den *sulcus bicipitalis externus* naar den elleboog, en slaat zich vervolgens om het halsje van den *radius* naar achteren, om de spieren van den voorarm van takken te voorzien.

De *n.n. thoracici* verschillen niet van die bij den mensch.

De *plexus lumbaris* wordt gevormd door de voorste takken der vijf bovenste lendenzenuwen. De voorste tak der laatste lendenzenuw gaat naar beneden in den *plexus sacro-coccygeus* over. De zenuwen, die de lendenvlecht afgeeft, zijn de *n. cutaneus externus*, *n. obturatorius* en *n. cruralis*. De *n. genito-cruralis* is niet aanwezig, maar uit het bovenste gedeelte der vlecht ontspringen nog een paar zwakke zenuwen, die tusschen de buikspieren naar voren loopen, en zich, als de *nervus ilio-inguinalis*, in de liesstreek verspreiden.

De *nervus cutaneus externus* ontspringt uit de tweede en derde lendenzenuw, en komt tusschen de beide hoofden van den *musculus psoas major* te voorschijn. Hij doorboort vervolgens den buikwand onder het *ligamentum Poupartii*, en verspreidt zich in de huid aan de buitenvlakte van de dij.

De *n. obturatorius* komt in loop en verspreiding met dien van den mensch overeen.

De *n. cruralis* ontspringt uit de derde, vierde en vijfde lendenzenuw, en loopt tusschen de beide hoofden van den *psoas major* naar de voorvlakte der dij, waar hij in de *fossa ilio-pectinea* aan de buitenzijde der *arteria cruralis* gelegen is. Op deze hoogte splitst zich de zenuw in twee gedeelten, waarvan het eene zich met vele takken in de hoofden van den *m. extensor cruris quadriceps* verspreidt. Het andere gedeelte voorziet den *m. sartorius* van zenuwen en verdeelt zich daarna in twee huid-takken, die, bedekt door den *m. sartorius*, langs het wondernet naar beneden loopen; boven de knie treden zij aan den buitenrand van den *m. sartorius* naar de oppervlakte, alwaar de eene tak, als *n. saphenus minor*, aan de binnenvlakte van de knie in de huid eindigt; de andere loopt als *n. saphenus major* langs de binnenvlakte van de knie en het onderbeen, vergezeld van de *vena saphena magna* naar den rug van den voet, en eindigt, na takverbinding met den *n. peroneus superficialis*, in de huid aan de binnenzijde van den grooten teen.

De voornaamste takken van den *plexus sacro-coccygeus* zijn de *n. cutaneus femoris posterior*, de *n. ischiaticus* en de *n. pudendus communis*. Afzonder-

lijke *n.n. glutaei* zijn niet te onderscheiden, maar de bilspieren worden voorzien door takjes van den *nervus ischiaticus.*

De drie genoemde zenuwen verlaten het bekken door het *foramen ischiaticum* langs den voorrand van den vroeger beschrevenen *ischio-coccygeus.* De *nervus cutaneus femoris posterior* verspreidt zich verder als huidzenuw aan de achtervlakte der dij.

De *n. ischiaticus* loopt op de gewone wijze langs de oppervlakte der dij naar de *fossa poplitea,* alwaar hij te voorschijn komt, gesplitst in eenen *n. peroneus* en *tibialis posticus.* De *n. peroneus,* bedekt door de breede aanhechting van den *m. biceps,* slaat zich om het bovenste gedeelte der *fibula* naar voren, en verdeelt zich daarbij in eenen diepen en oppervlakkigen tak. De *n. peroneus superficialis* verloopt achter den *m. peroneus longus* naar beneden, en komt vervolgens tusschen deze spier en den *m. extensor digitorum longus* te voorschijn, waarna de zenuw oppervlakkig naar de rugvlakte van den voet loopt, en met hare eindtakken zich in al de zijden der teenen verspreidt, alleen de buitenzijde van den kleinen toon uitgezonderd, die door den *n. suralis* van zenuwtakken voorzien wordt. De *n. suralis* is hier geen tak van den *n. tibialis,* zoo als bij den mensch, maar ontspringt in de *fossa poplitea* uit den *n. peroneus,* en loopt vervolgens langs de buitenzijde van het onderbeen naar beneden. De *n. peroneus profundus* geeft takken af aan al de spieren aan de voorvlakte van het onderbeen, en loopt daarbij, juist zoo als bij den mensch, langs de *membrana interossea* naar beneden. Onder het *ligamentum annulare anterius* gaat hij verder naar de rugvlakte van den voet, alwaar hij in den *m. extensor digitorum brevis* eindigt *.

De *n. tibialis posticus* loopt midden door de *fossa poplitea,* en verbergt zich tusschen de beide hoofden van den *m. gastrocnemius.* Aan het onderbeen voorziet hij de spieren aan de achtervlakte van zenuwtakken, en gaat verder, vergezeld van de *art.* en *ven. tibialis postica,* langs den *malleolus internus* naar de voetzool. Hier verdeelt zich de zenuw in een' *n. plantaris internus* en *externus,* welke zich, even als bij den mensch, in de huid en de spieren van de voetzool verspreiden.

Het *sympathische zenuwstelsel* heeft, voor zoo ver wij dit konden onder-

---

* Bij den mensch loopt deze zenuw verder door, en verspreidt zich ook in de naar elkaâr gekeerde zijden van den eersten en tweeden toon, die aldaar niet door den *n. peroneus superficialis* voorzien worden.

zoeken, over het geheel dezelfde zamenstelling als bij den mensch. Aan den hals echter konden wij bij geen van beide voorwerpen eene afzonderlijke grensstreng onderscheiden. Wanneer wij nu bedenken, dat de *n. vagus* hoog aan den hals met een vrij sterk *ganglion* voorzien is, dan wordt het zeer waarschijnlijk, dat de *n. vagus* en *n. sympathicus* aan den hals in eene gemeenschappelijke scheede verloopen, zoo als zulks bij meer dieren, bij den hond b. v., het geval is.

OVER DE ZINTUIGEN.

Het gehoor-orgaan.

Het uitwendig oor heeft bij de Lemuriden geene gelijkvormigheid met dat van den mensch, zoo als bij de apen. Het vertoont zich bij den *Potto* als eene ovaalronde schelp, die zich naar onderen toe tusschen twee uitstekende deelen, die men met den *tragus* en *antitragus* vergelijken kan, trechtervormig vernaauwt, en alzoo in den uitwendigen gehoorweg overgaat Een *helix* en *anthelix* ontbreken; een dwarse plooi vervult de plaats van het laatstgenoemde deel. De spieren, die de oorschelp bewegen (*musculus attollens auriculae, m. attrahens auriculae* en de twee *retrahentes*), zijn boven beschreven.

De kraakbeenige gehoorweg zet zich tot aan het trommelvlies aan de onderzijde voort, terwijl de beenige gehoorweg slechts een halfkanaal aan de bovenzijde vormt (blz. 11). Het trommelvlies ligt zeer naar beneden, in de diepte en scheef; het heeft omtrent 4 m. m. in de middellijn. De trommelholte zet zich aan den voorwand voort in de *tuba Eustachii*, waarvan boven gesproken is, terwijl zij zich naar onderen voortzet in de gehoorblaas (*bulla tympanica*), die achter de gewrichtsholte voor de onderkaak op de ondervlakte des schedels uitpuilt, en zich tot het *foramen ovale* en *foramen caroticum* uitstrekt, welke gaten aan den voorrand dezer beenige blaas gelegen zijn.

De gehoorbeentjes zijn over 't geheel gelijkvormig aan die van den mensch. De steel van den hamer ligt omtrent in het midden van het trommelvlies; de geheele lengte van dit beentje is nagenoeg 5 m. m; het hoofd of knopje is hoog geplaatst en in eene holte van den bovensten wand der trommelholte opgenomen. Het lange uitsteeksel is met den voorrand van den trommelring vergroeid, en werd bij het uithalen der gehoorbeentjes afgebroken. Het aanbeeld

is 3 m. m. lang, 2 m. m. breed, en heeft zeer korte *crura*, die met elkander een' regten hoek maken en naar achteren gerigt zijn; het onderste of voorste dezer schenkels draagt een klein eirond knopje (het dus genoemde *os lenticulare*), dat met den stijgbeugel verbonden is. De stijgbeugel is 2 m. m. lang, en heeft een breed *capitulum*; de voorste schenkel is meer gebogen, de andere is regter en, vooral naar onderen, breeder. Het plaatje van den stijgbeugel is langwerpig rond, en van onderen eenigzins bol. De opening tusschen de twee crura is 1 m. m. lang en ¾ m. m. breed.

De twee vensters, die van de trommelholte naar den doolhof geleiden, liggen meer naar binnen en naar boven dan bij den mensch. De *fenestra rotunda* ligt daardoor zeer digt bij den *porus acusticus internus*.

Wat den doolhof betreft, hiervan weet ik niet meer, dan het onderzoek van het afgebeitelde slaapbeen bij een reeds oud dier leeren kon. De halfcirkelvormige kanalen zijn vrij groot, vooral het vertikale of voorste kanaal. In zijne bogt is op de binnenvlakte van den schedel de holte gelegen, die den *flocculus* der kleine hersenen opneemt, en aan de binnenzijde dier holte ziet men den *aquaeductus vestibuli*. De *cochlea* is 4 m. m. lang en met de spits regt naar voren gerigt. Zij heeft ruim 2½ windingen. Aan de binnenzijde is de *cochlea* door eene ruime holte omgeven, die het voorste gedeelte van die gehoorblaas is, waarvan wij vroeger melding maakten. Slechts voor aan de spits is de *cochlea* door beenzelfstandigheid met de buitenvlakte van het slaapbeen verbonden, maar wordt overigens van alle kanten door ruimten, die met lucht opgevuld zijn, omgeven. Ook achter het gehoorwerktuig ligt eene ruime beenige holte, waarin het tepelvormig gedeelte van het slaapbeen veranderd is. Beenige, zeer dunne tusschenschotten verdeelen deze ruimten in eenige groote cellen, die echter alle met elkander verbonden zijn.

Het gehoor van den *Potto* zal waarschijnlijk scherp zijn; niet slechts de groote ontwikkeling van den doolhof, maar ook de vele resonerende ruimten, waardoor dit deel omgeven is, schijnen zulks aan te toonen.

Voor het overige zou de grootte van den doolhof, die van de spits der cochlea tot aan den achterrand der *canales semicirculares* ruim een centimeter bedraagt, reeds voor het scherp gehoor van den *Potto* schijnen te pleiten, wanneer er over 't geheel een bepaald verband aanwezig was tusschen de grootte des ligchaams en die der hoogere zintuigen (gezigt- en gehoorwerktuig). Maar het komt mij meer waarschijnlijk voor, dat er zulk een verband niet bestaat, en dat bij kleinere gewervelde dieren over 't geheel de betrekkelijke grootte

der zintuigen aanzienlijker is dan bij groote soorten. Het oog der walvischachtige dieren is wel op zich zelf het grootste oog, dat wij in het dierenrijk kennen, maar het is klein, in betrekking tot de grootte des geheelen ligchaams dezer dieren. Bestaat er misschien eene gemiddelde grootte der hoogere zintuigen in elke dierklasse, waarvan de twee uitersten, het *minimum* en *maximum*, minder uiteen wijken, dan de verschillen van de grootte des geheelen ligchaams?

De overige zintuigen.

Het oog werd door mij in 1851 in de Verh. over den *Potto* kort beschreven (blz. 8) en (op Pl. I Fig. 10) in eene dwarse doorsnede afgebeeld. Van Campen heeft dienaangaande niets anders opgeteekend, dan dat de cornea eenen zeer grooten omtrek heeft, en dat de pupil nagenoeg cirkelrond is. Ook trok de bolle *lens crystalina* zijne aandacht, die ik zeer groot en bijkans kogelrond vond. Evenmin als door mij werd door hem een *tapetum lucidum* waargenomen; hij vond de *choroidea* overal even zwart als bij den mensch. Eenige verspreide aanmerkingen over bijkomende deelen van het oog zijn boven medegedeeld.

Over de beenderen, die tot het reukorgaan behooren, is boven gehandeld (bl. 9, 12). Breedvoeriger is de tong beschreven (bl. 47, 48), welke beschrijving wij hier niet behoeven te herhalen.

VERKLARING DER AFBEELDINGEN.

Al de figuren zijn in natuurlijke grootte met uitzondering van Fig. 21 en 22 op Pl. III.

PLAAT I.

Fig. 1. Binnenvlakte van den schedel, na wegname van het schedeldak. *a. foramen opticum*; *b. foramen rotundum*; *c. foramen caroticum*; *d. foramen ovale*; *e. foramen spinosum*; *f. porus acusticus internus*; *g.* groef voor den *flocculus* der kleine hersenen; *h.* het dubbele *foramen jugulare.*

Fig. 2. Ondervlakte van den schedel.
a. Foramen condyloideum anterius; *b. foramen caroticum*; *c. foramen ovale*; *d. foramen stylomastoideum,* waarin ter verduidelijking een stiletje is ingebragt; *e.* opening waardoor de *art. meningea* naar de schedelholte gaat, evenzoo verduidelijkt; *f.f* De beide openingen van den *canalis pterygopalatinus,* waardoor een stilet heen gebragt is; *g.* de *foramina incisiva*; * plaats op de gehoorblazen, waar de kleine hoornen van het tongbeen zijn aangehecht.

Fig. 3. Beenderen van den arm en de hand van de linkerzijde. Het opperarmbeen ziet men van voren met het gat of kanaal boven den *condylus internus,* bl. 16. De hand is in pronatie geteekend, zoodat de rugvlakte der beenderen zigtbaar is. Bij † ziet men het *capitulum ulnae,* dat geleed is met het ondereinde van het spaakbeen.

Fig. 4. De handwortelbeentjes van de linkerzijde aan de volaire vlakte.

Fig. 5. De handwortelbeentjes van de regterzijde van de rugvlakte.

In fig. 3, 4 en 5 zijn de handwortelbeentjes door dezelfde cijfers aangewezen.

1. *Os naviculare*; 1*. *ossiculum accessorium*; 2. *os lunatum*; 3. *os triquetrum*; 4. *os multangulum majus*; 5. *os multangulum minus*; 6. *os capitatum*; 7. *os hamatum*; 8. *os. pisiforme*; 9. een toegevoegd beentje, aan de radiale zijde van het *os multangulum majus* en beneden het *os naviculare* gelegen; 10. beenplaatje in den dwarsen band van den *carpus*.

Fig. 6. Ondereinde van den *radius* en de *ulna* van de regterzijde en van achteren gezien, om de gewrichtsvlakte voor den *carpus* te toonen.

Fig. 7. Beenderen van den achterpoot der regterzijde van voren gezien.

Fig. 8. Voetwortelbeentjes van den linker achterpoot van de onderzijde gezien.

In fig. 7 en 8 zijn de voetwortelbeentjes met dezelfde cijfers aangewezen. 1. *calcaneus*; 2. *talus*; 3. *os naviculare tarsi*; 4, 5, 6. *ossa cuneiformia*; 7. *os cuboideum*. † Een beenplaatje aan de zoolvlakte van den voetwortel, naast het eerste *os cuneiforme* in het *ligamentum tarsi transversum* gelegen.

Fig. 9. Kop van de regterzijde gezien, om de gedaante van het uitwendig oor en de ligging der *glandula parotis* te toonen. *a a'*. de huidspier over het aangezigt, welke eene voortzetting is van de breede halsspier.

b'. *ductus stenonianus*; b. *parotis*.

Voor de *parotis* ziet men takken van den *nervus facialis*, en het meest naar boven de *art. temporalis.*

PLAAT II.

Fig. 10. Spieren van den bovenarm en zenuwen van den *plexus brachialis*, linkerzijde.

1. *Musculus pectoralis major*, omgeslagen.
2. *M. pectoralis minor.*
3. *M. subclavius.*
4. Oorsprong van den *m. scalenus posticus.*
5. Onderste gedeelte van den *m. serratus anticus major*, zich aan den hoek van het schouderblad inplantend.
6. *M. anconaeus quintus.*
8. *M. biceps.* 8'. Kort hoofd dezer spier, aan de pees van de *m. coraco-brachialis* ontspringend.
9. *M. brachialis internus.*

De zenuwen zijn door letters aangewezen: *a. nervus medianus*; *b. n. cutaneus brachii externus*; *c. n. cutaneus brachii internus*; *d. n. ulnaris*; *e. n. radialis.*

Fig. 11. Spieren van den arm en voorarm van de linkerzijde, achtervlakte.

a. Musculus infraspinatus; *b. M. teres major*; *c.* het lange hoofd van den *m. triceps*; *d.* het buitenste hoofd van dezelfde spier; *e.* buitenrand van den aan de binnenvlakte gelegen *m. biceps*; *f. m. extensor carpi radialis longus*; *g. m. ext. carpi rad. brevis*; *i. m. adductor pollicis longus*; *k. adductor pollicis*; *l. m. supinator longus*; *m. musculus extensor digitorum communis.*

Fig. 12. Spieren van den voorarm van dezelfde zijde en eveneens van achteren, na wegname van den *m. supinator longus,* den *m. extensor digitorum communis* en den *m. extensor carpi ulnaris.*

n.n. m. extensor pollicis longus; o.o. *m. indicator.*

f, g, i als in de vorige figuur.

Fig. 13. Spieren van denzelfden voorarm aan de voorste of binnenste vlakte.

a. Onderste inplanting van de tweehoofdige armspier (*m. biceps*); *b.* oorsprong van den *m. extensor carpi radialis longus*; *c. m. pronator teres*; *d. m. flexor carpi radialis*; *e. m. palmaris longus*; *f. m. flexor carpi ulnaris*; *g.* oorsprong van den *m. flexor digitorum profundus*; *h.* pees van den *m. adductor pollicis longus*; *i m. adductor pollicis brevis*; *k.* aanhechting van een gedeelte van den *m. flexor pollicis brevis*; *l. m. adductor digiti minimi*; *m. m. flexor digiti minimi.*

PLAAT III.

Fig. 14. Spieren van den achterpoot der regterzijde van de buitenzijde gezien.

a. Oorsprong van den *m. sartorius*; *b.* begin van den *m. rectus femoris*; *c. m. vastus externus*; *d. m. glutaeus maximus*; *e. m. biceps femoris*; *f.* buiten-ondervlakte van het dijbeen; *g. m. tibialis anticus*; *h. m. extensor hallucis longus*; *i. m. extensor hallucis brevis*; *k. m. extensor digitorum brevis*; *m. m. peroneus longus*; *n. m. peroneus brevis*; *o.* pees van den *m. peroneus longus*; *p. m. adductor pedis brevis*; *qq, m. extensor digitorum longus.*

Fig. 15. Onderschenkel en voet van denzelfden achterpoot van de binnen- of achtervlakte gezien.

a. m. poplitaeus; *b. m. flexor digitorum communis* (*perforans*); *c.* tweede *m. flexor digitor. communis*; deze spier gaat in eene sterke pees over, die in de voetzool door de pees der voorgaande spier bedekt wordt, en zich in tweeën

splitst; eene dezer pezen gaat, als *flexor pollicis longus*, naar het nagellid van den grooten teen, de andere pees gaat in de pezen van den voorgaanden *m. flexor digitorum longus* over. *d.d. M. tibialis posticus*; *f. m. peronaeus brevis*; *g. m. peroneus longus*; *h. m. flexor digitorum brevis*; deze spier ontspringt van de pees van den *m. flexor digitorum longus*.

Fig. 16. Linker voet van onderen.
a. m. adductor pedis brevis; *b. m. adductor digiti quinti externus*; *c. m. adductor digiti quinti internus*; *d. m. flexor digiti minimi*.

Fig. 17, 18. Eenige spieren, rondom het bekken gelegen.

Fig. 17. (Van de regterzijde) *a. m. glutaeus medius*; *b. m. glutaeus minimus*; *c.* pees van den *m. obturatorius internus*; *d. m. quadratus femoris*; *e. m. coccygeus*; aan deszelfs bovenrand ziet men den *nervus ischiaticus* te voorschijn komen; *f. m. adductor magnus*; *g. m. adductor longus*.

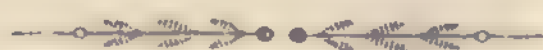
Fig. 18. (Van de linkerzijde) *a. m. bulbo-cavernosus*; *b. m. ischio-cavernosus*; *c. m. levator ani*. Bij *d.* ziet men den *nervus pudendus communis*.

Fig. 19. *Penis* en *scrotum* van voren. Men ziet de *glans penis* door eene eigenaardige, binnen het praeputium liggende slijmvliesplaat kringvormig omgeven.

Fig. 20. Kop, met de tong en het strottenhoofd. De onderkaak is weggenomen. De dwarse uitspringende randen op het verhemelte vallen duidelijk in het oog. — Tegen de ondervlakte der tong ziet men het in slippen verdeelde plaatje digt aan liggen, en daaronder in *a.* een tweede plaatje, hetgeen vroeger nog niet opgemerkt was. In dit plaatje ligt de opening van de ondertongs- en onderkaaks-speekselklieren, waarin een borstelhaar † is gebragt.

Fig. 21. Ondervlakte van een gedeelte van den schedel van den linkerkant, schuins naar boven in de trommelholte gezien tegen de beenplaat, die de cochlea van buiten omgeeft. Men ziet daarin de *fenestra ovalis* en *fenestra rotunda*. Deze figuur is ruim tweemalen de natuurlijke grootte.

Fig. 22. Gehoorbeentjes van de linkerzijde (vergroot ruim 3 malen) *a. malleus*; *b. incus*; *c. stapes*.



DRUKFOUTEN.

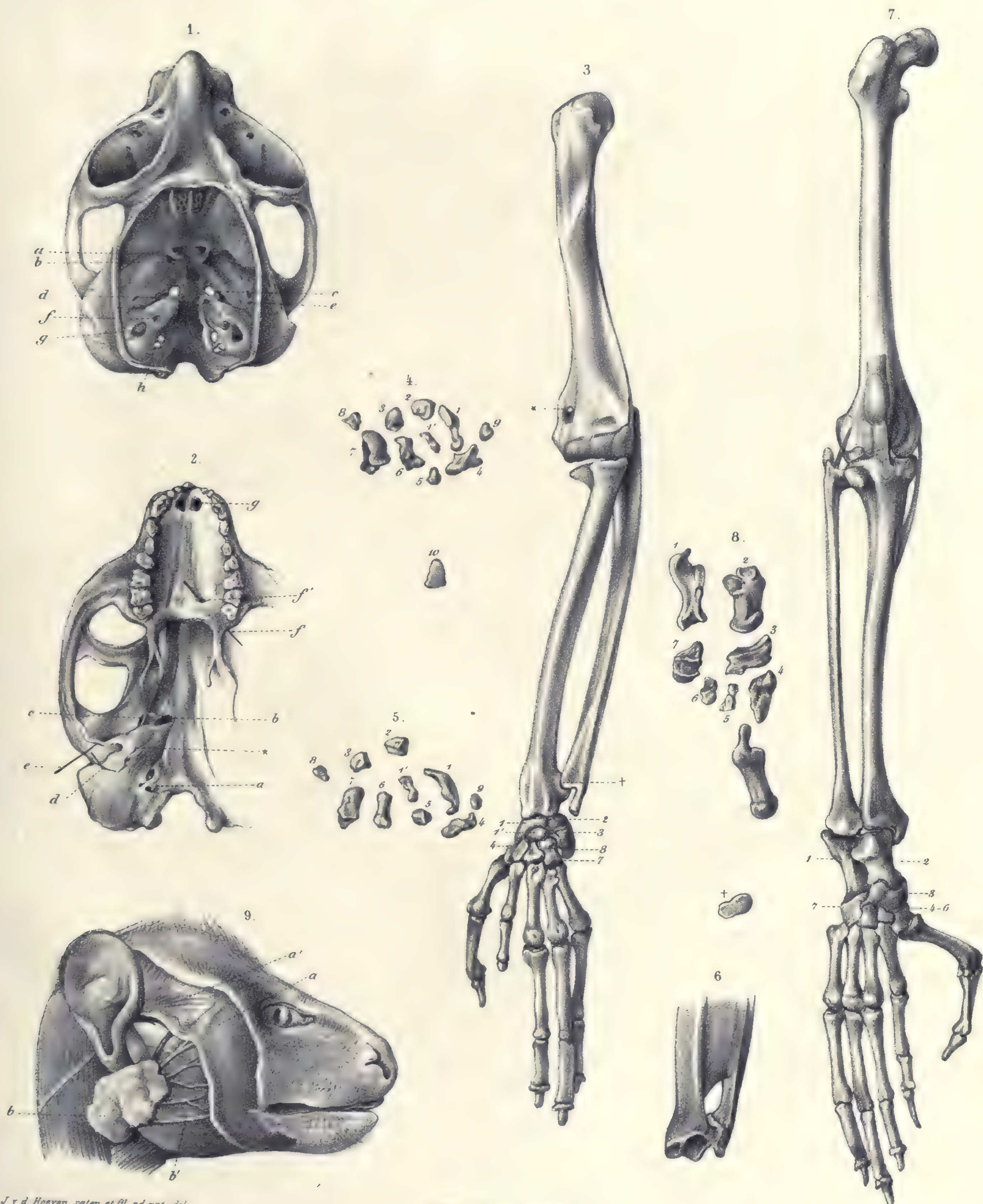
Bl. 20 reg. 21. *ossa metacarpi* van den vierden en vijfden vinger, lees: *ossa metatarsi* van den vierden en vijfden teen.

„ 37 „ 32. *m. adductor*, lees: *m. abductor.*

„ 38 „ 1. *m. adductor pollicis brevis*, lees: *m. abductor pollicis brevis.*

„ „ „ 16. *m. adductor*, lees: *m. abductor.*

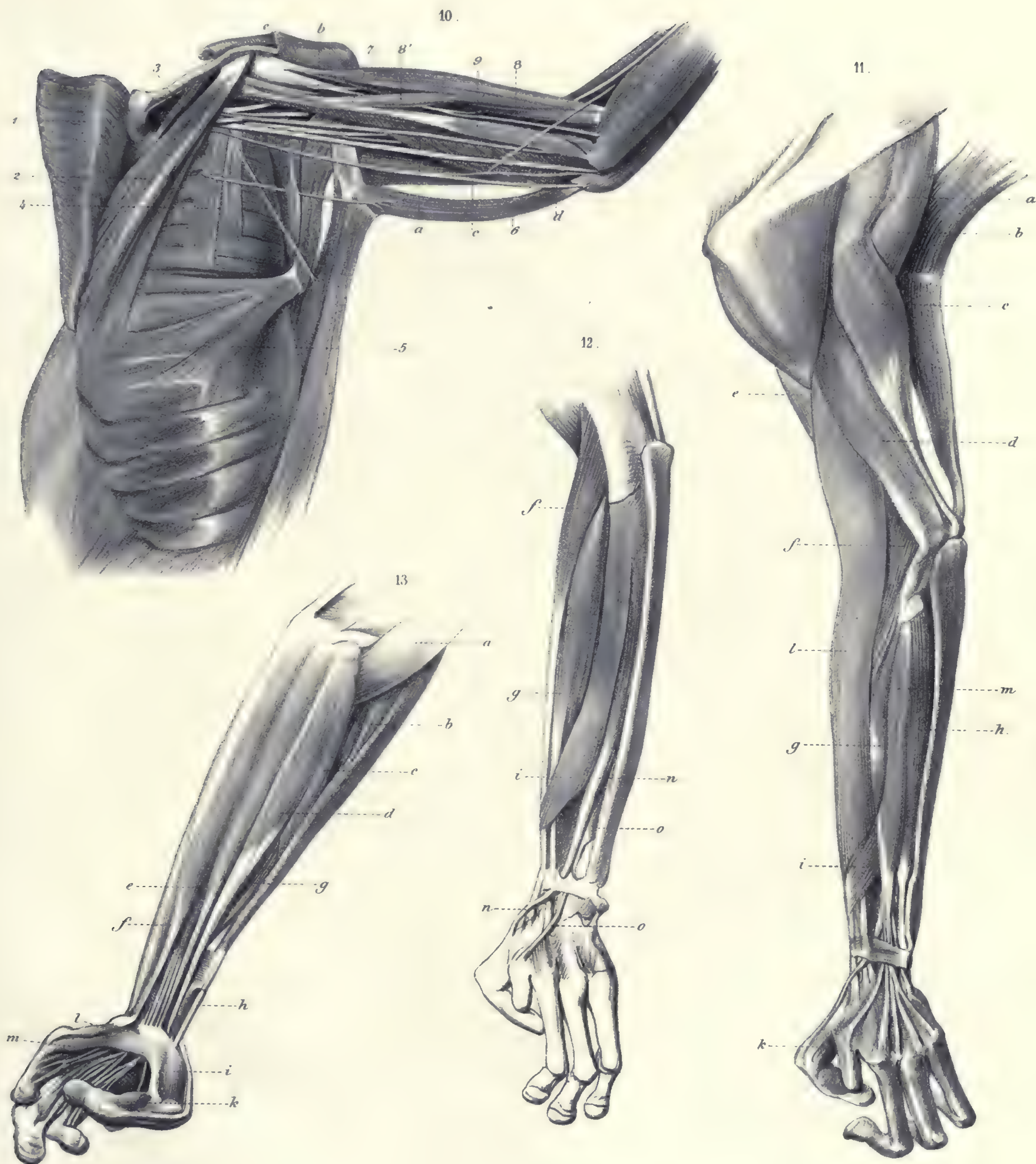
„ „ „ 17. „ „ „



J v d Hoeven pater et fil ad nat del

Mayer & Cº impr Amsterdam

A J Wendel in lap del



J. v. d. Hoeven pater et fil. ad nat. del.

Mayer & Co impr. Amsterdam.

A. J. Wendel in lap. del.



J. v. d. Hoeven ad nat. del.

Maijer & C° impr. Amsterdam.

A. J. Wendel in lap. del

INHOUD.